



С.В. ПОРШНЕВ, Д.В. КУСАЙКИН

**ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ,
ЗАДАНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ ВРЕМЕННОЙ
СЕТКЕ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ
КООРДИНАТ УЗЛОВ**

МОНОГРАФИЯ

Ульяновск
2016

УДК 32.811.3
ББК 621.391.833.64
П 60

Рецензенты:

Зобнин Борис Борисович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет», г. Екатеринбург.

Белозеров Вадим Анатольевич – кандидат технических наук, начальник группы защиты информации Федерального казенного предприятия «Нижнетагильский институт испытания металлов», г. Нижний Тагил.

П 60 Поршневу С.В., Кусайкину Д.В. Исследование алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов: монография. – Ульяновск: Зебра, 2016. – 211 с.

В монографии изложены результаты исследований алгоритмов восстановления дискретных сигналов (ДС), заданных в узлах временной сетки (ВС) с точно неизвестными значениями координат ее узлов. Проведен анализ состояния предметной области, включая: существующие виды неравномерной дискретизации сигналов по времени и причины ее возникновения. Предложена классификация видов неравномерной дискретизации сигналов во времени. Приведены примеры реальных измерительных систем, на выходе которых получают ДС, заданные в узлах неравномерной временной сетки (НВС), а также методы восстановления ДС данного типа. Приведена постановка задачи восстановления ДС, заданного в узлах НВС, с неизвестными точно значениями координат ее узлов. Изложены результаты исследования особенностей восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов, а также методов, основанных на уточнении значений координат узлов НВС, и оценки их точности. Предложены новые алгоритмы восстановления ДС, заданных на НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, продемонстрирована их работоспособность и получены оценки точности восстановления ДС с помощью данных алгоритмов. Проведен анализ точности восстановления периодических ДС, получаемых на выходе реальных цифровых систем (высокоскоростного 8-ми битного АЦП на основе КМОП-технологии 0.18 мкм, системы, состоящей из 8 параллельных 5-ти битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм), с помощью разработанных алгоритмов восстановления.

УДК 32.811.3
ББК 621.391.833.64

ISBN 978-5-9907771-1-8

© Поршневу С.В., Кусайкину Д.В., 2016.
© Оформление.
Издательство «Зебра», 2016.



S.V. PORSHNEV, D.V. KUSAYKIN

**RESEARCH OF ALGORITHMS FOR THE
RECONSTRUCTION OF NON-UNIFORM SAMPLED
DISCRETE-TIME SIGNALS WITH UNKNOWN
SAMPLING LOCATIONS**

Ulyanovsk
2016

UDK 32.811.3
BBK 621.391.833.64
P 60

P 60 Porshnev S.V., Kusaykin D.V. Research of algorithms for the reconstruction of non-uniform sampled discrete-time signals with unknown sampling locations. – Ulyanovsk: Zebra, 2016. – 211 p.

In this treatise are considered the results of research of algorithms for the reconstruction of non-uniform sampled band-limited discrete-time signal with unknown sampling location. The condition of problem domain is analyzed, including: applying signal sampling schemes and causes of origin of the non-uniform sampling signals. Also is proposed classification of signal sampling schemes. Examples of real measurement systems, on the output of which registers non-uniform sampled signals with unknown sampling location as well as methods to reconstruct this type signals are given. The problem of signal reconstruction from non-uniform samples is considered. Interpolation methods to reconstruct a band-limited discrete-time signal from non-uniform samples with unknown sampling location, and optimization methods by estimating unknown sampling locations values are analyzed. Estimates of accuracy of interpolation methods for recovery of irregularly sampled signals are given. Also are given estimates of accuracy of methods to reconstruct a signal from non-uniform samples with unknown sampling locations by estimating unknown sampling locations values and presenting a solution of certain multiparameter problem of global optimization. Are proposed the new algorithms to reconstruct band-limited discrete-time signal from non-uniform samples with unknown sampling location and is demonstrated their performance. Estimate of accuracy of algorithms is compared and reconstruction errors are given in the numerical examples. The results of the research on the accuracy of the periodic signals reconstruction registered at the high speed 8 parallel 5-bit ADC system output based on the 65 nm CMOS technology and 8-bit high-rate ADC output based on the 0.18μm CMOS technology by means of special algorithms to reconstruct a signal from non-uniform samples with unknown sampling locations are analyzed.

UDK 32.811.3
BBK 621.391.833.64

ISBN 978-5-9907771-1-8

© Porshnev S.V., Kusaykin D.V., 2016.
© Cover.
Publishing «Zebra», 2016.

Список сокращений

ARS – Additive Random Sampling (аддитивная стохастическая дискретизация);

DASP – Digital Alias-free Signal Processing (цифровая обработка сигналов без наложения спектров);

DNL – Differential Non Linearity (дифференциальная нелинейность);

JRS – Jittered Periodic Sampling (флуктуирующая частота дискретизации);

LCT – Linear Canonical Transform (линейное каноническое преобразование);

MC – Multi-Coset sampling (групповая дискретизация);

PNS – Periodic Nonuniform Sampling (периодически неравномерная дискретизация);

PSMD – Periodic Sampling with Missing Data (равномерная дискретизация со случайными пропусками отсчетов);

SER – Signal-to-Error Ratio (отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления);

SPP – Stationarity Points Process (стационарный точечный процесс);

WSS – Wide Sense Stationarity (стационарный в широком смысле);

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

ВС – временная сетка;

ДВП – дискретное вейвлет-преобразование;

ДПФ – дискретное преобразование Фурье;

ДС – дискретный сигнал;

ЗРСВ – закон распределения случайной величины;

КМОП – комплементарная структура металл-оксид-полупроводник;

ЛЧМ – линейная частотная модуляция;

МЗР – младший значащий разряд;

МНК – метод наименьших квадратов;

НВС – неравномерная временная сетка;

НЧД – неравномерная частота дискретизации;

РВС – равномерная временная сетка;

СПИ – системы передачи информации;

ЦФ – цифровой фильтр.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	8
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	12
1.1 Виды неравномерной дискретизации и их классификация	12
1.2 Причины возникновения и примеры реальных неравномерно дискретизированных сигналов с неопределенными значениями координат узлов	31
1.3 Методы восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации	38
1.4 Методы локальной аппроксимации эмпирических зависимостей	67
1.5 Постановка задач исследования.....	71
ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ, ЗАДАННЫХ НА ВРЕМЕННОЙ СЕТКЕ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КООРДИНАТ ЕЕ УЗЛОВ, С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ И МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ КООРДИНАТ УЗЛОВ	74
2.1 Методика исследования особенностей восстановления дискретных сигналов, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов и методов оценивания координат узлов ...	74
2.2 Исследование особенностей восстановления линейного тренда, дискретизированного в узлах неравномерной временной сетки с джиттером, с помощью интерполяционных методов	79
2.3 Исследование особенностей восстановления дискретных сигналов, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов	81
2.4 Исследование особенностей восстановления дискретных сигналов с помощью оптимизационных алгоритмов оценивания координат узлов временной сетки..	86
2.5 Выводы по главе.....	93

ГЛАВА 3 РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ, ЗАДАННЫХ В УЗЛАХ НЕРАВНОМЕРНОЙ ВРЕМЕННОЙ СЕТКИ С ТОЧНО НЕИЗВЕСТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КООРДИНАТ ЕЕ УЗЛОВ.....95

3.1 Алгоритмы восстановления ДС, заданного в узлах временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, основанные на корректировке значений координат отсчетов.....95

3.2 Алгоритмы восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неопределенными координатами узлов, основанные на использовании скорректированных значений ДС107

3.3 Анализ результатов исследования точности алгоритмов восстановления ДС, основанных на корректировке значений координат узлов 114

3.4 Анализ результатов исследования точности алгоритмов восстановления, основанных на корректировке значений ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно координатами ее узлов 120

3.5 Выводы по главе..... 130

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В РЕАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ..... 133

4.1 Анализ результатов точности восстановления ДС, образованного одиночным высокоскоростным 8 битным АЦП на основе КМОП-технологии 0.18 мкм . 136

4.2 Анализ результатов точности восстановления ДС, получаемого на выходе системы 8 параллельных 5-ти битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм 143

4.3 Выводы по главе..... 156

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 157

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 159

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЗНАЧЕНИЯ SER ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ СИГНАЛА №3 В СООТВЕТСТВИИ С АЛГОРИТМАМИ № 4,5..... 173

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. РЕЗУЛЬТАТЫ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ..... 174

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В РАБОТЕ..... 180

Введение

При реализации высокоскоростных аналого-цифровых преобразователей (АЦП), обрабатывающих высокочастотные сигналы порядка сотен мегагерц, единиц гигагерц, одной из основных проблем, ограничивающей дальнейшее повышение скорости, является проблема нестабильности частоты дискретизации по времени (джиттера). В результате сигнал, получаемый на выходе высокоскоростного АЦП, представляет собой дискретный сигнал (ДС), заданный в узлах неравномерной временной сетки (НВС) с неизвестными значениями координат ее узлов. ДС данного типа получают, например:

- на выходе высокоскоростных АЦП из-за несоответствия синхросигнала, задающего частоту дискретизации по времени [62];
- в системе, состоящей из набора АЦП, работающих параллельно с временным разделением (Time- Interleaved ADCs) [167,165,166,136,87];
- в многоскоростных дециматорах [119].

Кроме того, ДС, заданные в узлах НВС с неизвестными значениями координат ее узлов, возникают и ряде других технических систем: систем звукозаписи, навигационных системах в подводной акустики, парашютных радиозондах, в автоматических платформах [103], системах, реализующих парадигму «умной пыли» (smart dust) [91], в оптических фурье-спектрометрах [154], в медицине (например, при исследовании variability сердечного ритма [60,94,137,3]; в лазерной доплеровской анемометрии при измерении скорости частиц [45]) и др.

Существуют две отличные друг от друга постановки задачи восстановления ДС с НЧД:

Задача 1. Дана последовательность значений ограниченного по спектру ДС $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, заданного на НВС, с соответствующими значениями координат $t_i \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, $i = \overline{1, N}$. Необходимо по данным наборам произвести восстановление ДС в узлах равномерной временной сетки

$$\eta_m = mT_1, \quad m = \overline{1, M},$$

где $t_1 \leq \eta_1 \leq t_2$; T_1 – период дискретизации ($T_1 < T$); M – число узлов ВС η_m .

Задача 2. Дана последовательность значений ограниченного по спектру ДС $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, заданного на НВС, например с джиттером

$$t_i = iT + \tau_i, \quad t_i > t_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}$$

где T – период дискретизации; $\tau_i \in]-T/2, T/2[$ – случайная величина, точные значения которой неизвестны. Необходимо произвести восстановление ДС в узлах равномерной временной сетки η_m .

Отличие данных задач поясняется рис. 1. Отметим, что наибольший интерес представляет собой вторая задача, наиболее часто встречающаяся на практике.

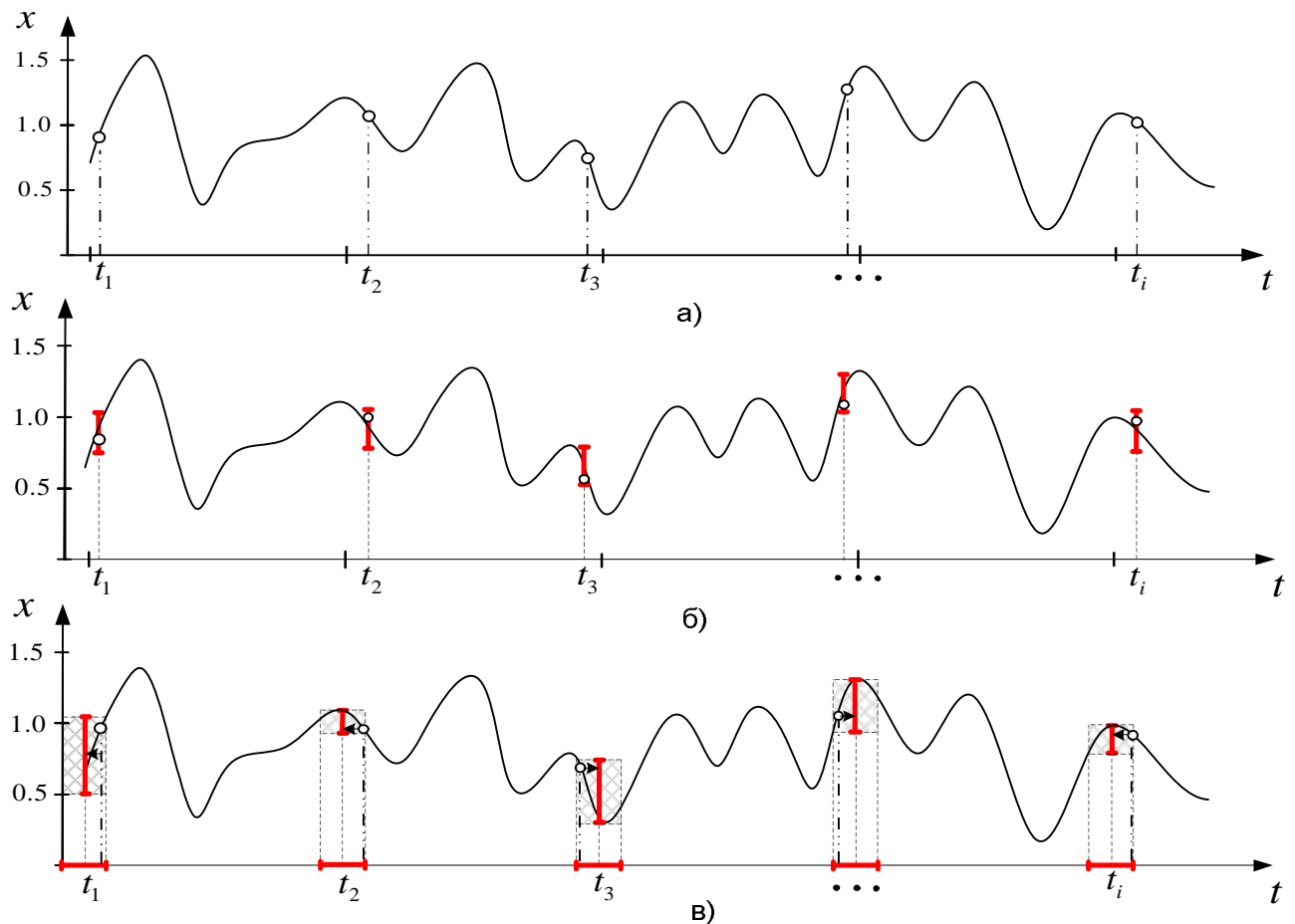


Рис. 1 К постановке задачи восстановления ДС, заданного на НВС: а), б) с известными значениями координат узлов (Задача №1) в рамках задачи интерполяции и аппроксимации, соответственно; в) с неизвестными значениями координат узлов (Задача № 2)

В связи с тем, что в большинстве методов цифровой обработки сигналов (ЦОС), явно или неявно предполагается, что значения ДС заданы в узлах временной сетки (ВС) с фиксированным расстоянием между ее узлами (вейвлет-анализ, преобразование Гильберта, Фурье-анализ и т.д.), неотъемлемой частью процесса ЦОС данного типа ДС является процедура восстановления ДС – вычисления значений ДС в узлах той или иной ВС. Описания известных методов восстановления ограниченных по спектру ДС, заданных в узлах НВС, приведены в [141,68,156,110,106,140]. Их анализ показывает,

что в их основу положено предположение (явно или неявно) о том, что координаты узлов НВС известны точно, которое, как очевидно, делает задачу восстановления ДС по своей постановке аналогичной классической задаче интерполяции, методы решения которой известны [31].

Значительно более сложной задачей оказывается задача восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов. Здесь, априори, можно ожидать, что известные методы восстановления сигналов, дискретизированных на НВС, окажутся неработоспособными или не обеспечат требуемой точности восстановления ДС.

Отметим, что сегодня известен ряд методов восстановления ДС, заданного в узлах НВС с точно неизвестными координатами ее узлов [55], [113], основанные на нахождении оценок неизвестных значений координат НВС, представляющих собой решение некоторой многопараметрической задачи глобальной оптимизации. Однако на практике, когда число отсчетов ДС составляет 1000 отсчетов, данные методы из-за высокой вычислительной сложности оптимизационной задачи и проблем выбора начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационного процесса к истинному глобальному минимуму, использовать данные методы оказывается невозможным.

Отметим, что Задача № 2 оказывается схожей с задачей восстановления функциональной зависимости при наличии ошибок в независимых переменных по активной схеме регрессионного анализа, методы решения которой рассматривал В.Я. Катковник. При этом его основное внимание было направлено на разработку вычислительных алгоритмов, позволяющих оценивать параметры тех или иных стохастических моделей на основе локальной аппроксимации, но не собственно алгоритмов вычисления истинных значений эмпирических зависимостей, вычисляемых по данным моделям, и анализа их точности. Однако, сам подход, основанный на локальной аппроксимации, представляется достаточно конструктивным и его целесообразно использовать при решении Задачи № 2.

В этой связи разработка алгоритмов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, свободных от отмеченных недостатков, оказывается актуальной.

Для достижения поставленной цели в работе были решены следующие задачи основные задачи:

1. Проведен анализ состояния предметной области.

2. Исследована точность восстановления ДС, заданных на НВС с неизвестными точно значениями координат узлов, с помощью интерполяционных методов и оптимизационных методов оценивания координат узлов НВС.

3. Разработаны алгоритмы восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, не требующие решения сложных с вычислительной точки зрения оптимизационных задач, и получены соответствующие оценки точности восстановления (среднее значение отношения мощности сигнала к мощности разности квадратов отклонений) ДС.

4. Проведен анализ точности восстановления ДС, получаемых на выходе реальных цифровых систем, с помощью разработанных алгоритмов восстановления ДС, заданного в узлах НВС.

К основным новым результатам, полученным в проведенном исследовании, следует отнести:

1. Результаты исследования влияния джиттера частоты дискретизации на точность восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов.

2. Результаты исследования оптимизационных методов оценивания координат узлов, предложенных J. Browning, свидетельствующие о их неработоспособности в случае, если на интервале анализа сигнала укладывается нецелое число периодов одной или нескольких из его гармоник.

3. Разработанные алгоритмы восстановления ДС, заданных на НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов (алгоритм №1, основанный на использовании метода статистических испытаний; алгоритм № 2, основанный на учете знака мгновенных значений джиттера; алгоритм № 3, основанный на вычислении значений координат узлов неравномерной сетки с помощью аппроксимации по методу наименьших квадратов (МНК); алгоритм № 4, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра; алгоритм № 5, основанный на локальной аппроксимации сигнала по МНК), которые обеспечивают более высокую точность восстановления исследованных модельных сигналов в сравнении с другими известными методами. 4. Результаты исследования особенностей восстановления периодического ДС, регистрируемого на выходе 8-битного высокоскоростного АЦП и системы параллельных 5 битных АЦП.

Глава 1 Анализ состояния предметной области. Постановка задач исследования

1.1 Виды неравномерной дискретизации и их классификация

По-видимому, впервые комплексный анализ проблем, возникающих при восстановлении мгновенных значений сигнала $s(t)$ по отсчетам дискретного сигнала (ДС) s_k , $k = \overline{1, K}$, измеренным в узлах неравномерной временной сетки (НВС) $\{t_k\}$, был проведен Shapiro и Silverman [145]. Здесь было предложено название ДС s_k – сигнал с неравномерной частотой дискретизации (НЧД). В [145] были исследованы особенности восстановления ДС со следующими видами ЧД:

1. **Равномерная дискретизация** (Periodic Sampling – PS-дискретизация) ($f_d = \text{const}$), при использовании которой координаты узлов временной сетки (ВС) вычисляются по формуле:

$$t_k = T \cdot k, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Далее ДС, заданный в узлах ВС (1.1), для краткости будем обозначать PS-сигнал.

2. **Флуктуирующая частота дискретизации** (jittered periodic sampling – JRS-дискретизация), при использовании которой координаты узлов ВС вычисляются по формуле:

$$t_k = k \cdot T + \tau_k, \quad (1.2)$$

где T – период дискретизации при $\tau_k \equiv 0$ для каждого k (среднее время между отсчетами), $\{\tau_k\}$ – случайные величины,

$$\tau_k \in \left] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[\text{ с,}$$

распределенные по закону $p(\tau)$ с нулевым математическим ожиданием $E[\tau_k] = 0$ и дисперсией σ_τ .

Далее ДС, заданный в узлах ВС (1.2), для краткости будем обозначать JRS-сигнал.

Обеспечить дискретизацию сигнала $s(t)$ без элайзинга (alias-free sampling) удастся при условии, что $\sigma_\tau \ll T$ и

$$F_{\max} \leq \frac{1}{2} \min \left(\frac{1}{t_{k+1} - t_k} \right), \quad (1.3)$$

где F_{\max} – максимальная частота спектра сигнала $s(t)$.

Плотность вероятности $P_k(t)$ последовательности $\{t_k\}$ связана непосредственно с плотностью распределения $p(\tau)$ последовательности $\{\tau_k\}$ [4,50,170]:

$$P_k(t) = p(t - kT), \quad (1.4)$$

$$E[t_k] = k \cdot T.$$

На практике при изучении свойств JRS-сигналов наиболее часто используют следующие модели плотности распределения интервалов $p(\tau)$:

1. равномерное распределение

$$P(t) = \frac{1}{a-b}, a \leq t \leq b, \quad (1.5)$$

2. нормальное распределение

$$P(t) = N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (1.6)$$

Плотности распределений $P_k(t)$, полученные в результате статистического моделирования процедуры JRS-дискретизации сигнала $s(t)$ для различных видов плотности распределения случайной последовательности $\{\tau_k\}$, представлены на 1.1–1.8 (здесь количество отсчетов JRS-сигналов – 20, количество испытаний $NTrial = 10^4$, $T = 1$).

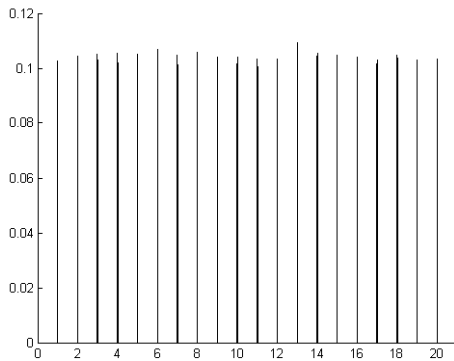


Рис. 1.1 Плотности распределения отсчетов JRS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-2}T]$

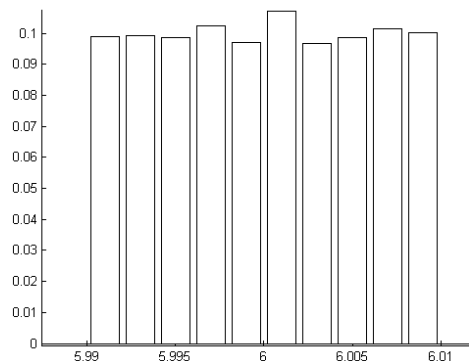


Рис.1.2 Плотности распределения 6-го отсчета JRS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-2}T]$

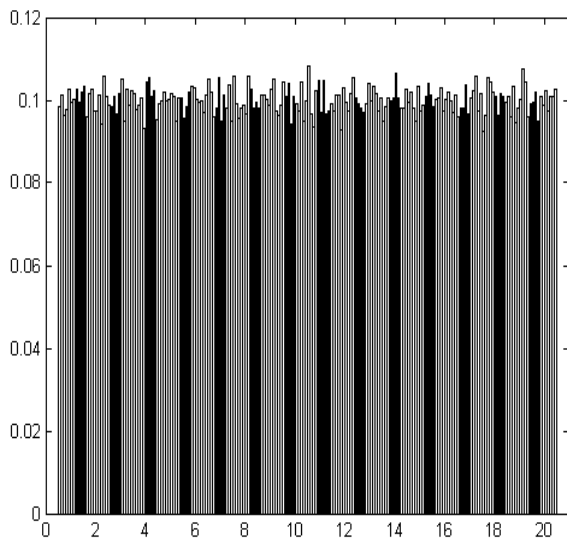


Рис.1.3 Плотности распределения отсчетов JRS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 0.5T]$

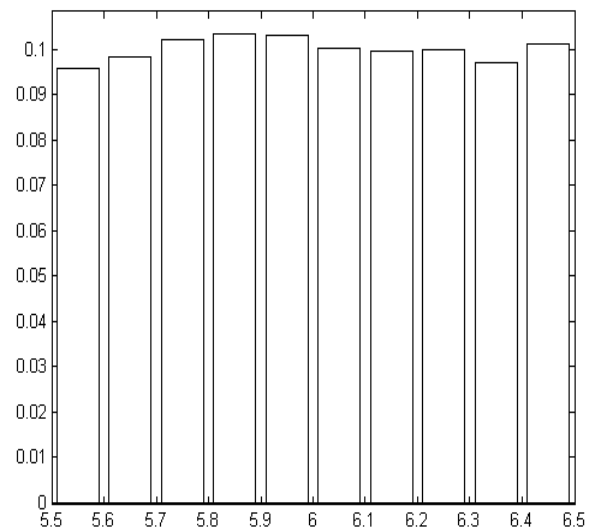


Рис. 1.4 Плотность распределения 6-го отсчета JRS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 0.5T]$

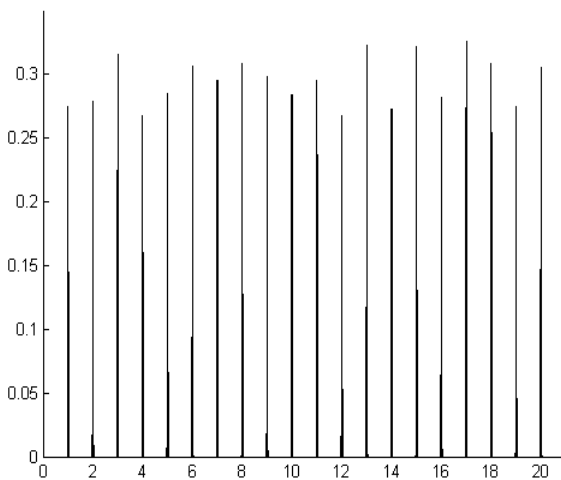


Рис.1.5 Плотности распределения отсчетов JRS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения на интервале $N(0, 10^{-2})$

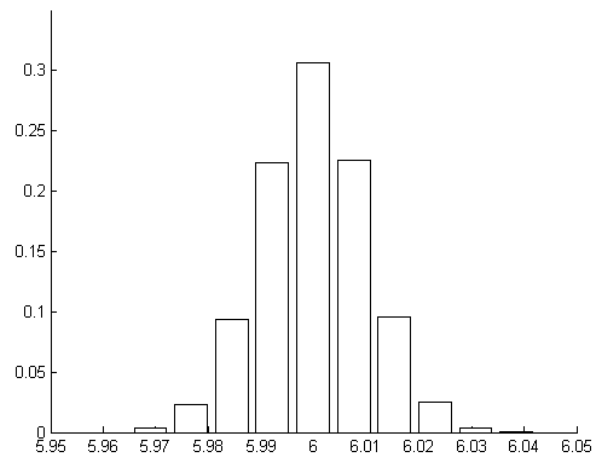


Рис. 1.6 Плотность распределения 6-го отсчета JRS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения на интервале $N(0, 10^{-2})$

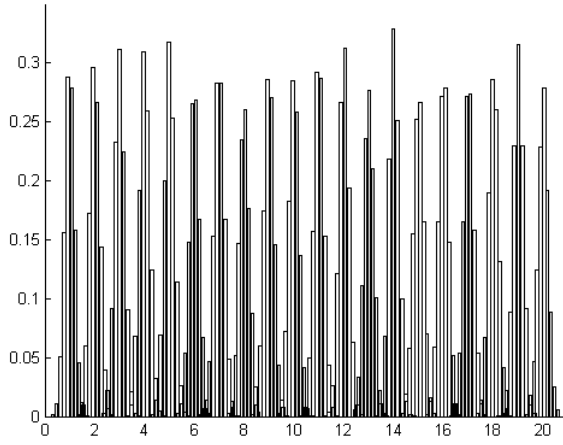


Рис.1.7 Плотности распределения отсчетов JRS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0,0.2)$

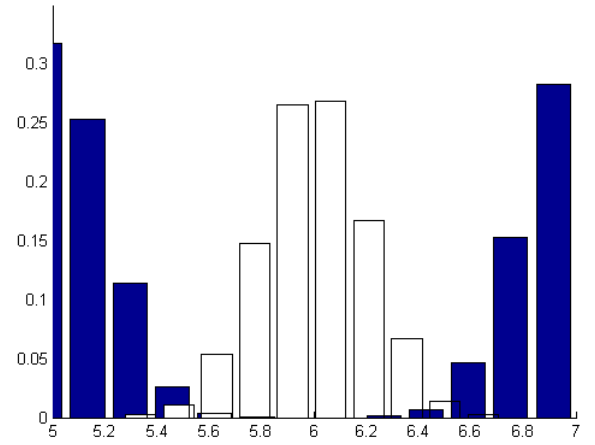


Рис.1.8 Плотности распределения 5-го, 6-го и 7-го отсчетов JRS-сигнала $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0,0.2)$

Из рис. 1.1–1.8 видно, что увеличение области возможных значений случайной величины $\{\tau_k\}$ приводит к тому, что становятся возможными ситуации, в которых $t_k \geq t_{k+1}$, т.е. ВС (1.2) будет неупорядоченной. Данный результат, как очевидно, противоречит физической модели механизма дискретизации сигналов, а потому для JRS-сигналов необходимо ввести дополнительное ограничение области возможных значений:

$$t_{k+1} - t_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Обеспечить выполнение условия (1.7) для равномерной плотности распределения (1.5) можно при условии $a > 0$, $b - a < T$, во втором случае вместо закона распределения (1.6) – использовать закон распределения случайной величины с ограниченной в точке $\tau = 0$ областью рассеяния:

$$p(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\tau^2/2\sigma^2}, & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

свойства которого исследованы в [150].

При восстановлении JRS-сигнала джиттер достаточно легко учесть, если известны точные значения членов последовательности $\{t_k\}$. Однако на практике данное условие, как правило, не выполняется, поэтому приходится использовать более сложные методы восстановления дискретного сигнала [42,93,6,154,160,76,75].

3. **Аддитивная стохастическая дискретизация** (additive random sampling – ARS) [67], при использовании которой значения координат узлов ВС есть сумма предыдущего отсчета и случайной положительной величины τ_k :

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k, \quad (1.9)$$

где τ_k – независимые случайные числа, выбираемые из реализаций идентичных распределений $p(\tau)$, у которых $E[\tau_k] = T$, $D[\tau_k] = \sigma^2$.

Полагая в (1.9) $k = 0, 1, \dots$, $t_0 = 0$, получаем

$$t_k = \sum_{m=1}^k \tau_m. \quad (1.10)$$

В рассматриваемом случае функция плотности вероятности $P(t)$ ($P(t) = 0$, $t < 0$) случайной последовательности $\{t_k\}$ связана с плотностью распределения $p(\tau)$ такой, что $E[\tau_k] = \mu$, $D[\tau_k] = \sigma^2$, следующими соотношениями:

$$P_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{k-1}(\tau - \xi) p(\xi) d\xi = \int_0^{\tau} P_{k-1}(\tau - \xi) p(\xi) d\xi, k \geq 2, \quad (1.11)$$

$$P_1(t) = p(\tau).$$

Первый и второй моменты распределения $P(t)$, вычисляемого в соответствии с (1.11), выражаются через соответствующие величины распределения $p(\tau)$:

$$E[t_k] = k\mu, \quad (1.12)$$

$$D[t_k] = k\sigma^2, \quad (1.13)$$

поэтому данный вид дискретизации можно рассматривать как случайный поток с накапливаемой дисперсией.

Предельным для плотности распределения $P_k(t)$ является нормальное распределение $N(k\mu, \sqrt{k}\sigma)$.

На практике при изучении свойств ARS-сигналов наиболее часто используют следующие модели плотности распределения временных интервалов $p(\tau)$ [170]:

1. Равномерный закон распределения.
2. Нормальный закон распределения $N(\mu, \sigma)$.
3. Экспоненциальный закон распределения

$$p(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\tau/\beta}, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

4. Гамма-распределение

$$p(\tau) = \begin{cases} \tau^{k-1} \frac{e^{-\tau/\beta}}{\beta^k \Gamma(k)}, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

у которого, как известно, первый и второй моменты связаны с параметрами распределения k, β следующими соотношениями:

$$E[\tau] = k\beta, \quad D[\tau] = k\beta^2.$$

Отметим, что к случайным последовательностям (1.9), для вычисления значений которых используются случайные числа с плотностями вероятностей, описываемых равномерным (1.5) и нормальным (1.6) законами распределения, в полной мере относится сделанное в предыдущем разделе замечание относительно ограничения области возможных значений τ_k .

Плотности распределений $P_k(t)$, полученные в результате статистического моделирования процедуры ARS-дискретизации сигнала $s(t)$ для различных видов плотности распределения случайной последовательности $\{\tau_k\}$, представлены на рис. 1.9–1.12 (здесь количество отсчетов дискретного сигнала – 20, количество испытаний $NTrial = 10^4$, $T = 1$).

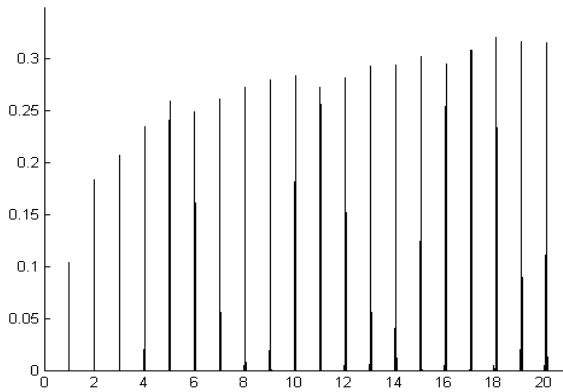


Рис. 1.9 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-2}T]$

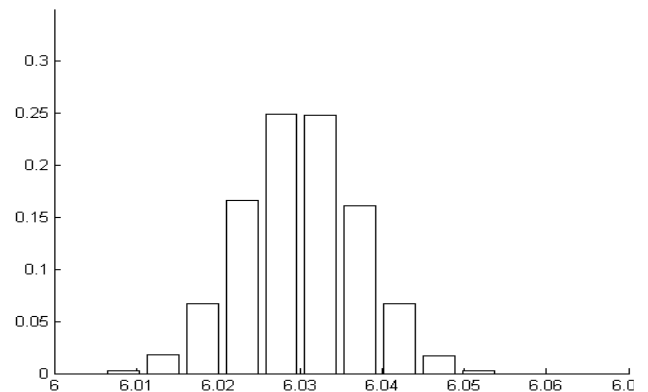


Рис. 1.10 Плотность распределения отсчетов ARS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-2}T]$

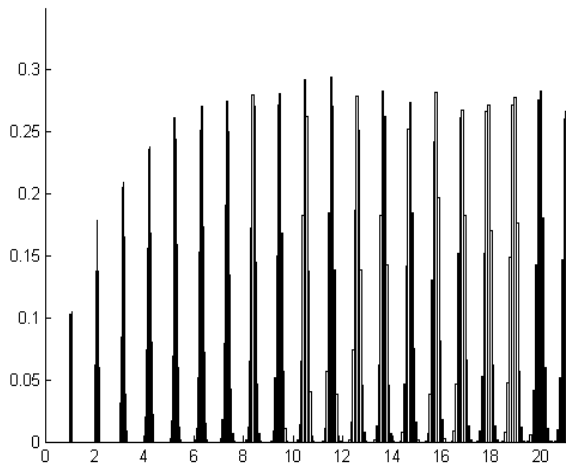


Рис. 1.11 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-1}T]$

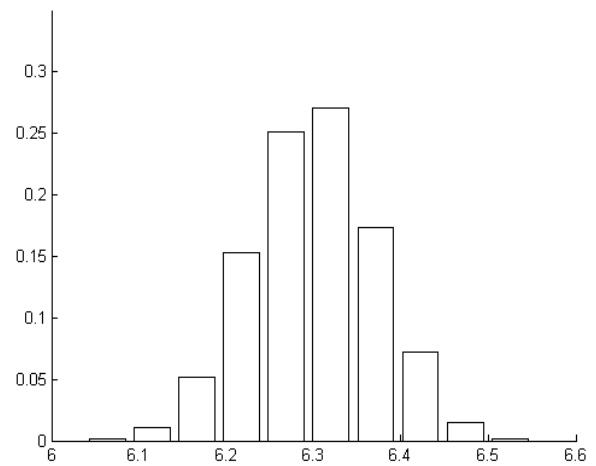


Рис. 1.12 Плотность распределения 6-го отсчета ARS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 10^{-1}T]$

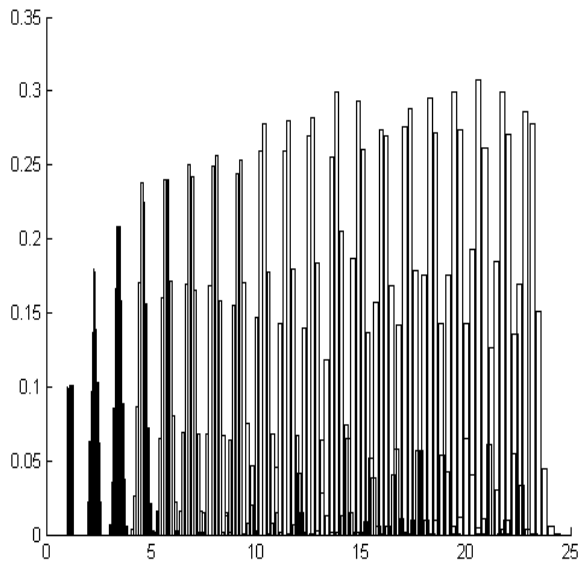


Рис. 1.13 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 0.3T]$

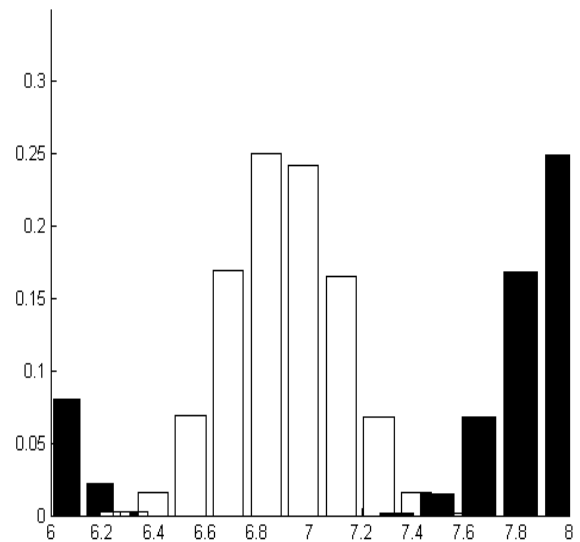


Рис. 1.14 Плотность распределения 5-го, 6-го и 7-го отсчетов ARS-сигнала $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с равномерным законом распределения на интервале $[0; 0.3T]$

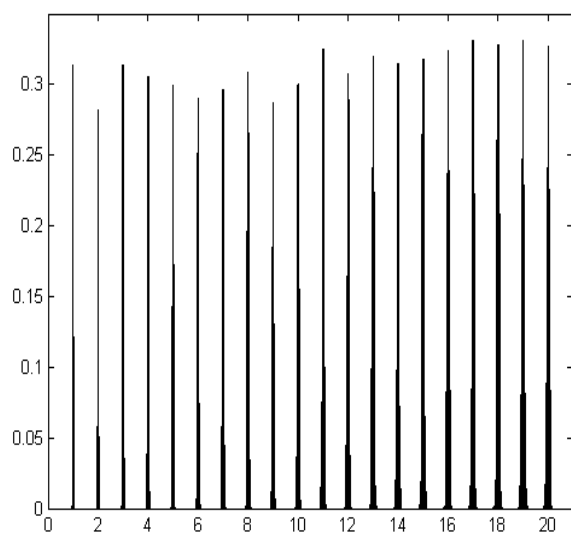


Рис. 1.15 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0, 10^{-2})$

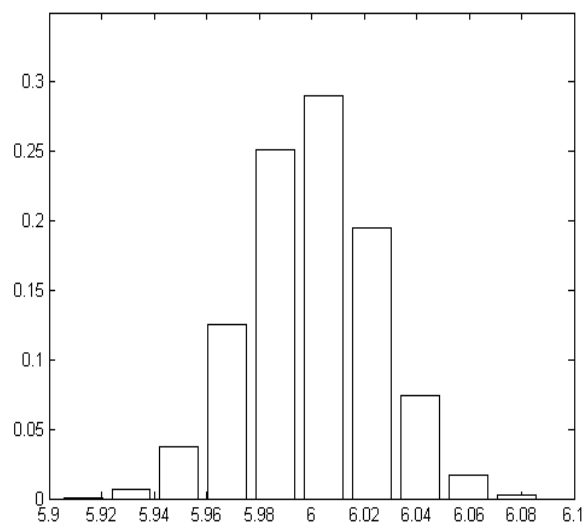


Рис. 1.16 Плотность распределения отсчетов ARS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0, 10^{-2})$

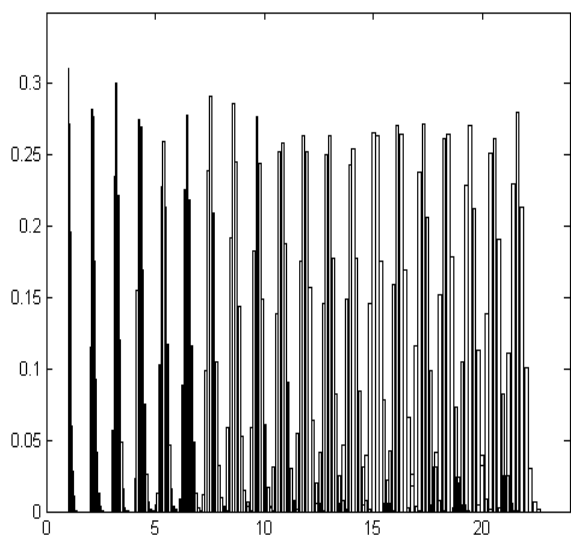


Рис.1.17 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0, 10^{-1})$

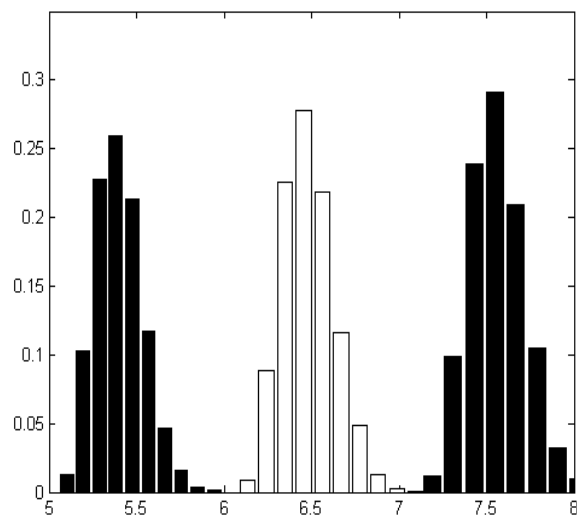


Рис. 1.18 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения $N(0, 10^{-1})$

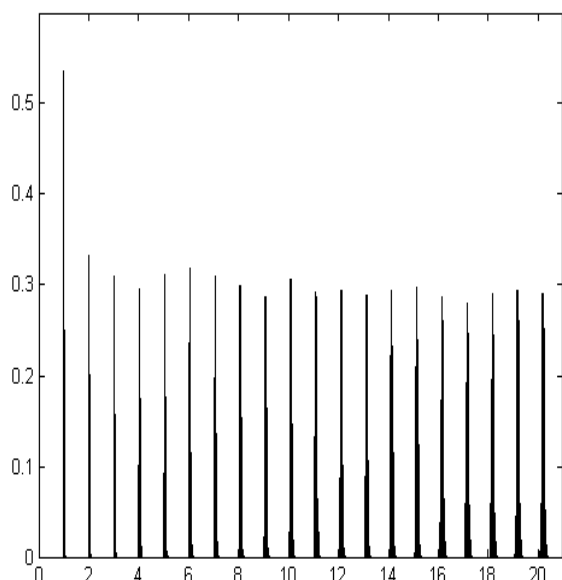


Рис. 1.19 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с экспоненциальным законом распределения, $\beta = 10^{-2}$

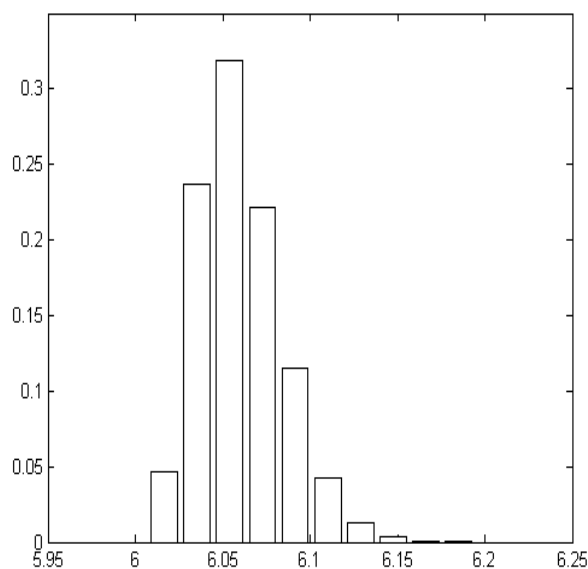


Рис.1.20 Плотность распределения 6-го отсчета ARS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения, $\beta = 10^{-2}$

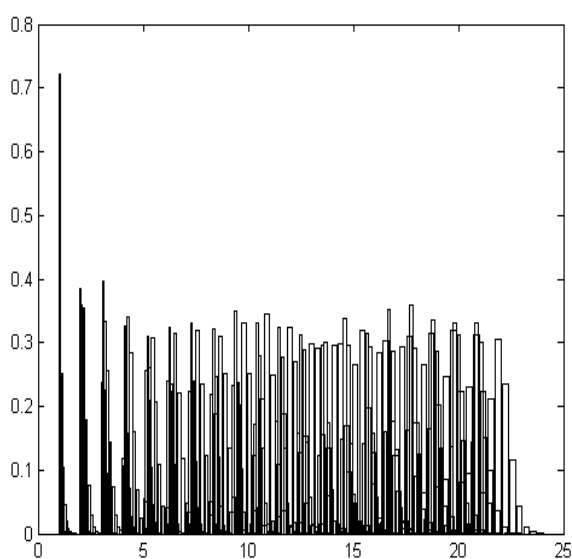


Рис. 1.21 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с экспоненциальным законом распределения, $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$

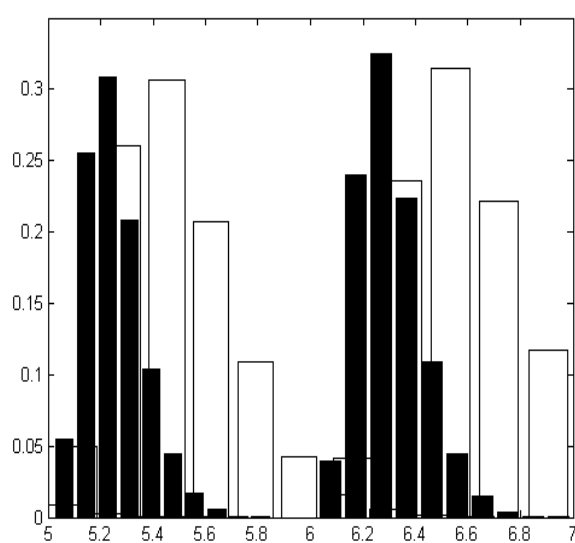


Рис. 1.22 Плотности распределения 5-го, 6-го и 7-го отсчетов ARS-сигнала $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $P_8(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с усеченным нормальным законом распределения, $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$

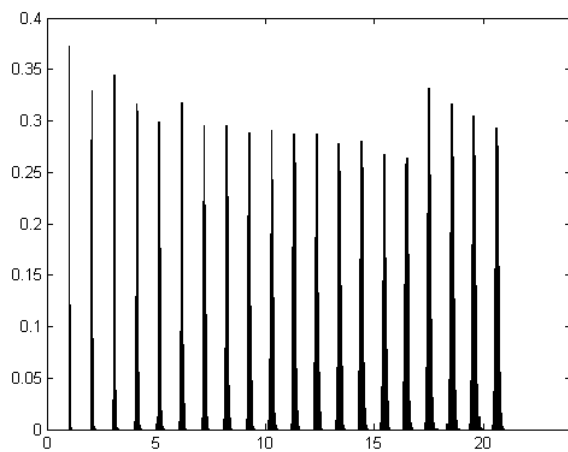


Рис.1.23 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с гамма-распределением, $k = 3$, $\beta = 1 \cdot 10^{-2}$

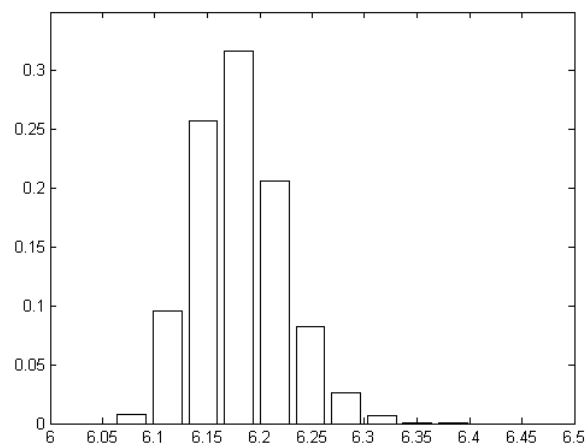


Рис. 1.24 Плотность распределения 6-го отсчета ARS-сигнала $P_6(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с гамма-распределением, $k = 3$, $\beta = 1 \cdot 10^{-2}$

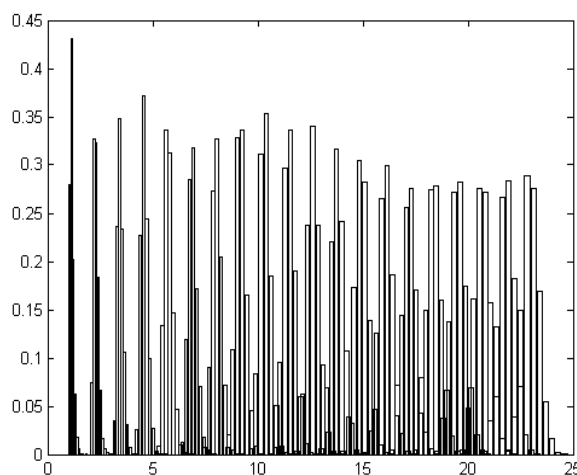


Рис.1.25 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с гамма-распределением, $k = 3$, $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$

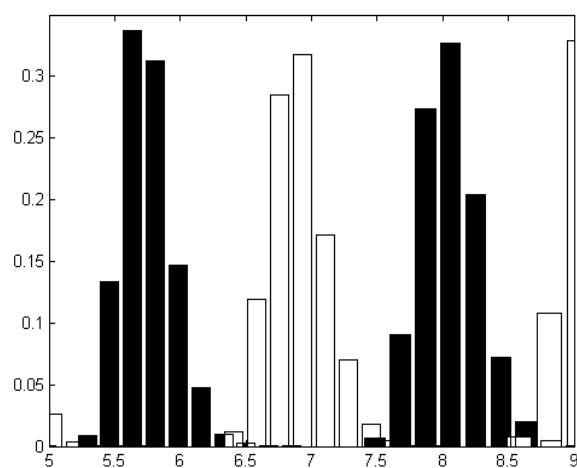


Рис. 1.26 Плотности распределения отсчетов ARS-сигнала $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность с гамма-распределением, $k = 3$, $\beta = 1 \cdot 10^{-2}$

Из рис. 1.1–1.26 видно, что не существует кардинальных отличий между JRS-дискретизацией и ARS-дискретизацией. Действительно, как при первом, так и при втором типе дискретизации увеличение размера области значений членов случайной последовательности $\{\tau_k\}$, вне зависимости от вида плотности распределения данной последовательности, приводит к тому, что распределение отсчетов ДС во временной области стремится к равномерному распределению. Это происходит за счет перекрытия

функций распределений близлежащих отсчетов $p_k(\tau)$, $P_k(t)$, и для JRS-дискретизации и для ARS-дискретизации.

Отмеченное свойство распределений отсчетов JRS-дискретизации и ARS-дискретизации позволяет для стационарных в широком смысле непрерывных случайных процессов (Wide Sens Stationarity – WSS) ввести понятие стационарного процесса, дискретизированного на НБС (Stationarity Points Process – SPP) [49]. Beutler и Leneman определили SPP как последовательность значений непрерывного WSS-процесса, дискретизированного на НБС $\{t_k\}$, которая для каждого значения k инвариантна относительно любого временного сдвига равного длине любого из временных интервалов или расстоянию между интервалами. Математическая модель SPP-сигнала есть свертка исходного сигнала $s(t)$ и случайной дискретизирующей последовательности

$$\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta(t - t_k), \quad (1.14)$$

где $\{\alpha_k\}$ – последовательность значений, выбираемая из множества независимых значений стационарного случайного процесса $\{t_k\}$, первый и второй моменты которой оказываются равными

$$\alpha = E[\alpha_k], \quad (1.15)$$

$$\rho(n) = E[\alpha_{k+n} \alpha_k], \quad (1.16)$$

соответственно.

Следуя данному определению SPP-процесса, оказывается возможным описать SPP-процесс в терминах первого и второго моментов случайной последовательности, используя соответствующие характеристики случайной последовательности $\{\alpha_k\}$, вычисляемые в соответствии с (1.15), (1.16), и плотности вероятностей случайной последовательности $P_k(\tau)$, [48]:

$$E[\Delta(t)] = \alpha\gamma,$$

$$R_{\Delta}(\tau) = E[\Delta(t)\Delta(t+\tau)] = \gamma\rho(0)\delta(\tau) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n)P_n(\tau),$$

где γ – среднее значение периода дискретизации ($\beta = E[t_k - t_{k-1}]$).

Альтернативное определение SPP-процесса дано Билинским в [50]: SPP-процесс – есть случайный процесс, плотность вероятности которого тождественно равна плотности распределения вероятностей его отсчетов на временной оси. Тогда плотность вероятности SPP-процесса

$$P_{SSP}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) = \frac{1}{\mu}, \quad (1.17)$$

что подтверждается результатами моделирования, представленными на рис. 1.9-1.26.

Еще один вид ARS-дискретизации описан в [51]. Здесь значения соседних узлов ВС, используемой для дискретизации непрерывного сигнала, являются не независимыми, но коррелированными друг с другом. Степень их связи характеризуется коэффициентом корреляции ρ , вычисляемым по следующей формуле:

$$\rho = \frac{E[\tau_k \tau_{k+1}] - \mu^2}{\sigma^2}. \quad (1.18)$$

В отличие от случая, когда случайная последовательность $\{\tau_k\}$ содержит независимые отсчеты, выбираемые из генеральной совокупности распределения $N(\mu, \sigma)$, в рассматриваемом случае значения τ_k , вычисляются по следующей формуле [51]:

$$\tau_k = \begin{cases} \mu + \xi_k, & k = 1, \\ \mu + \rho(\tau_{k-1} - \mu) + \sigma\sqrt{1 - \rho^2}\xi_k, & k > 1, \end{cases} \quad (1.19)$$

где ξ_k – случайная последовательность с плотностью распределения $N(0,1)$.

В [143, с. 67] показано, что плотность распределения k случайных отсчетов коррелированной ARS-последовательности описывается распределением $N(\mu, \sigma_k)$, где

$$\sigma_k = \sigma^2 \frac{k(1 - \rho^2) - 2\rho + 2\rho^{k+1}}{(1 - \rho)^2}. \quad (1.20)$$

Пример гистограммы распределения отсчетов ARS-последовательности, полученной на основе статистического моделирования (здесь количество отсчетов дискретного сигнала – 20, число испытаний – $N_{Trial} = 10^4$), представлен на рис. 1.27.

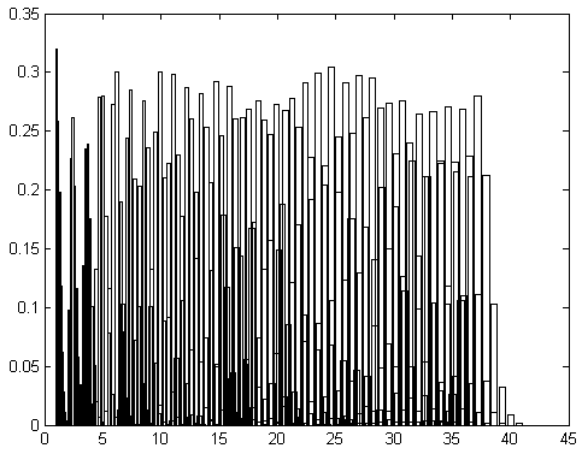


Рис. 1.27 Плотности распределения отсчетов коррелированного ARS-сигнала $P_k(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность, вычисленная в соответствии с (1.19), $\mu = 1$, $\rho = 0.5$, $\sigma = 0.3$

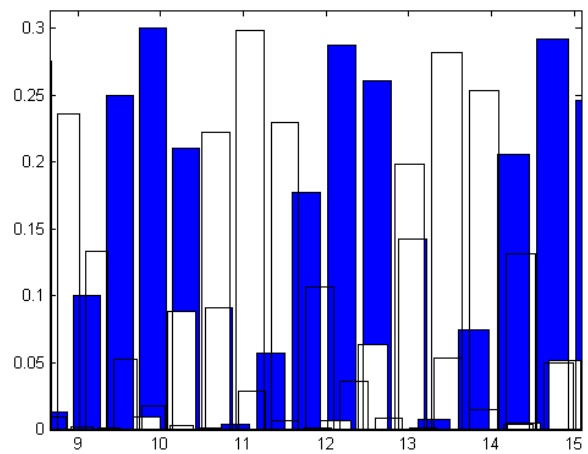


Рис. 1.28 Плотности распределения 9-го – 14-го отсчетов коррелированного ARS-сигнала $P_{9-14}(t)$, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность, вычисляемая в соответствии с (1.19), $\mu = 1$, $\rho = 0.5$, $\sigma = 0.3$

Из рис. 1.27, 1.28 видно, что при увеличении номера отсчета k происходит перекрытие гистограмм соседних отсчетов. В этой ситуации для анализа особенностей плотности вероятности последовательности $\{t_k\}$ оказывается удобным использовать суммарную плотность вероятности

$$P_{\Sigma}(t_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K P_k(t), \quad (1.21)$$

где $P_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ – плотность вероятностей k -го отсчета. Для вычисления $P_{\Sigma}(t_k)$ в соответствии с (1.21), как очевидно, достаточно вычислить гистограммы каждой случайных последовательностей $\{t_k\}$, $k = \overline{1, K}$, используя один и тот же набор отрезков:

$$x_i = \frac{\max(t_K)}{N_g} i, \quad i = \overline{1, N_g}, \quad (1.22)$$

где N_g – количество отрезков, и провести их суммирование.

Зависимости суммарной плотности вероятностей $P_{\Sigma}(t_k)$ от времени для различных значений ρ представлены на рис. 1.29–1.31.

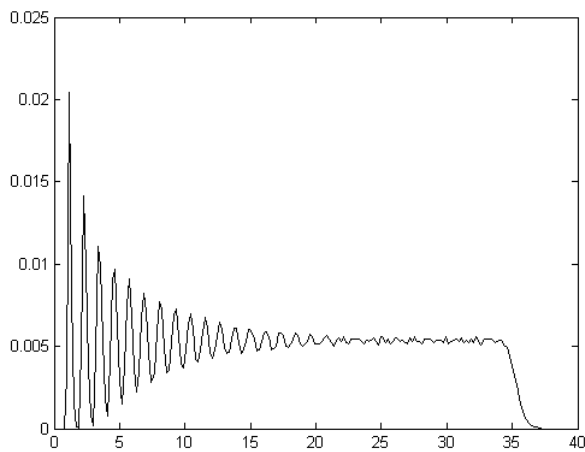


Рис. 1.29 Суммарная плотность вероятности $P_{\Sigma}(t_k)$ отсчетов коррелированного ARS-сигнала, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность, вычисленная в соответствии с (1.19), $\mu = 1, \rho = 0, \sigma = 0.2$

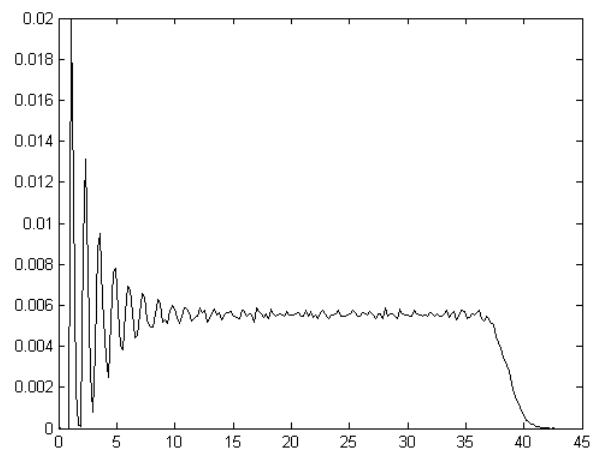


Рис. 1.30 Суммарная плотность вероятности $P_{\Sigma}(t_k)$ отсчетов коррелированного ARS-сигнала, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность, вычисленная в соответствии с (1.19), $\mu = 1, \rho = 0.5, \sigma = 0.2$

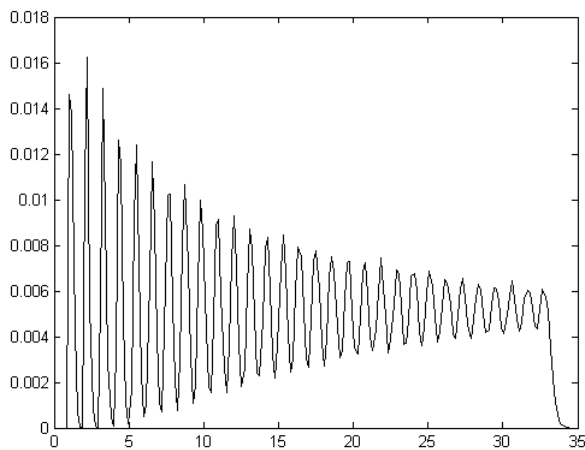


Рис. 1.31 Суммарная плотность вероятности $P_{\Sigma}(t_k)$ отсчетов коррелированного ARS-сигнала, $\{\tau_k\}$ – случайная последовательность, вычисленная в соответствии с (1.19), $\mu = 1, \rho = -0.5, \sigma = 0.2$

Из рис. 1.29-1.31 видно, что при положительной корреляции между соседними значениями τ_{k-1}, τ_k время достижения зависимостью $P_{\Sigma}(t_k)$ стационарного значения (соответственно, время перехода дискретизируемого сигнала $s(t)$ в состояние SSA-сигнала) уменьшается, и, наоборот, при отрицательной корреляции между соседними значениями τ_{k-1}, τ_k время достижения зависимостью $P_{\Sigma}(t_k)$ стационарного значения увеличивается.

4. Равномерная дискретизация со случайными пропусками отсчетов (periodic sampling with missing data – PSMD) [101,108,72,123,92]. PSDM-дискретизация является частным случаем рассмотренной выше ARS-дискретизации, при

использовании которой координаты узлов соответствующей временной сетки вычисляются по следующей формуле:

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k, \quad (1.23)$$

где $\tau_k \in \{T, 2T, \dots\}$ – случайная дискретная величина, плотность распределения которой описывается некоторым дискретным распределением, например,

$$p_\tau(nT) = P(\tau_m = nT) = p(1-p)^{n-1}. \quad (1.24)$$

При этом для любой из возможных плотностей распределения случайной последовательности $\{\tau_k\}$ математическое ожидание $E[t_k] > kT$, когда $E[\tau_k] > T$.

5. Рекуррентная неравномерная дискретизация (recurrent nonuniform sampling), называемая также периодически неравномерной дискретизацией (periodic nonuniform sampling – PNS) [172,107,146,133], при использовании которой координаты узлов соответствующей ВС вычисляются по следующей формуле [39]:

$$t_{ns} = \tau_s + Nn\Delta \quad (s = 0, 1, \dots, N-1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.25)$$

где N – целое число;

$\Delta = \frac{1}{2F_{\max}}$, где F_{\max} – верхняя частота спектра дискретизируемого сигнала $s(t)$;

$\tau_0 = 0, \quad \tau_s < N\Delta$.

Графическая интерпретация (1.25) представлена на рис. 1.32.

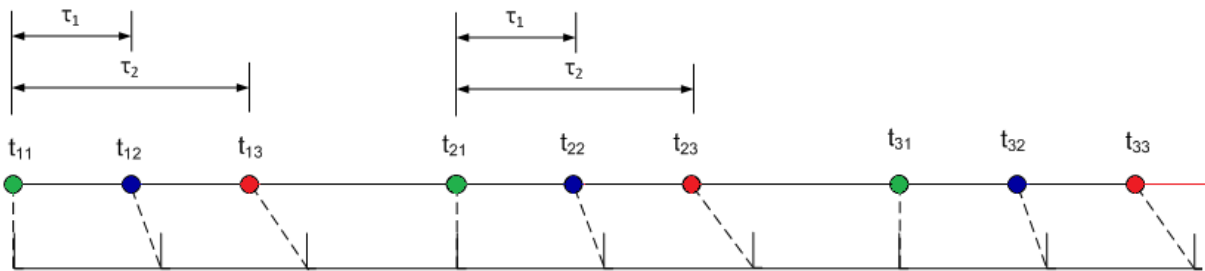


Рис. 1.32 Схема рекуррентной неравномерной дискретизации

Из 1.32 видно, что узлы выбранной дискретной ВС представляют собой группы, состоящие из N точек каждая. Период повторения групп равен $\frac{N}{2F_{\max}}$, при каждом

фиксированном значении s ($s = 0, 1, \dots, N-1$) последовательность моментов $t_{-2s}, t_{-1s}, t_{0s}, t_{1s}, t_{2s}$, аналогична последовательности узлов временной сетки, используемой при PS-дискретизации, период дискретизации $T_N = N\Delta$. Например, $t_{n0} = 3n\Delta$, $t_{n1} = 3n\Delta + \tau_1$, $t_{n2} = 3n\Delta + \tau_2$.

Другие варианты рекуррентной неравномерной дискретизации, а также результаты сравнения погрешностей восстановления соответствующих дискретных сигналов, не получившие, однако, на практике широкого распространения, рассмотрены в [139,149,43,131,163]. Отметим также работу [105] (Margolis), в которой исследована зависимость погрешности восстановленного сигнала по значениям PUS-сигнала от значения второго отсчета в группах рекуррентной дискретизации (на рис. 1.32 – t_{12}, t_{22}, t_{32}), определяемой как разность между соответствующими значениями дискретного и восстановленного сигналов. В ней Margolis показывает, что необходимым условием достижения минимального значения погрешности восстановления сигнала является равномерность распределения отсчетов дискретного сигнала.

Частным случаем рекуррентной дискретизации является групповая дискретизация (Multi-Coset sampling, MC) [71,116,162,44]. MC-дискретизация – это рекуррентная неравномерная дискретизация с частотой ниже, чем выбранная по теореме Котельникова-Найквиста [99]. Для фиксированного временного интервала T , $T \leq \frac{1}{W}$, где W – частота Найквиста, и для подходящего положительного целого числа L , при MC дискретизации координаты узлов соответствующей ВС вычисляются как $t = (kL + c_i)T$, $1 \leq i \leq q$, $k = 0, 1, \dots$, где c_i – это положительные реальные числа меньшие L . (При этом предполагают, что все временные смещения c_i различны.) Иллюстрация MC-дискретизации представлена на рис. 1.33.

Из рис. 1.33 видно, что при данном виде дискретизации устройство, реализующее MC-дискретизацию, выбирает $p \leq L$ отсчетов на временном интервале длительностью $L \cdot T$ секунд. Следовательно, MC-дискретизация оказывается эквивалентной равномерной дискретизации с $f_d = p / LT$.

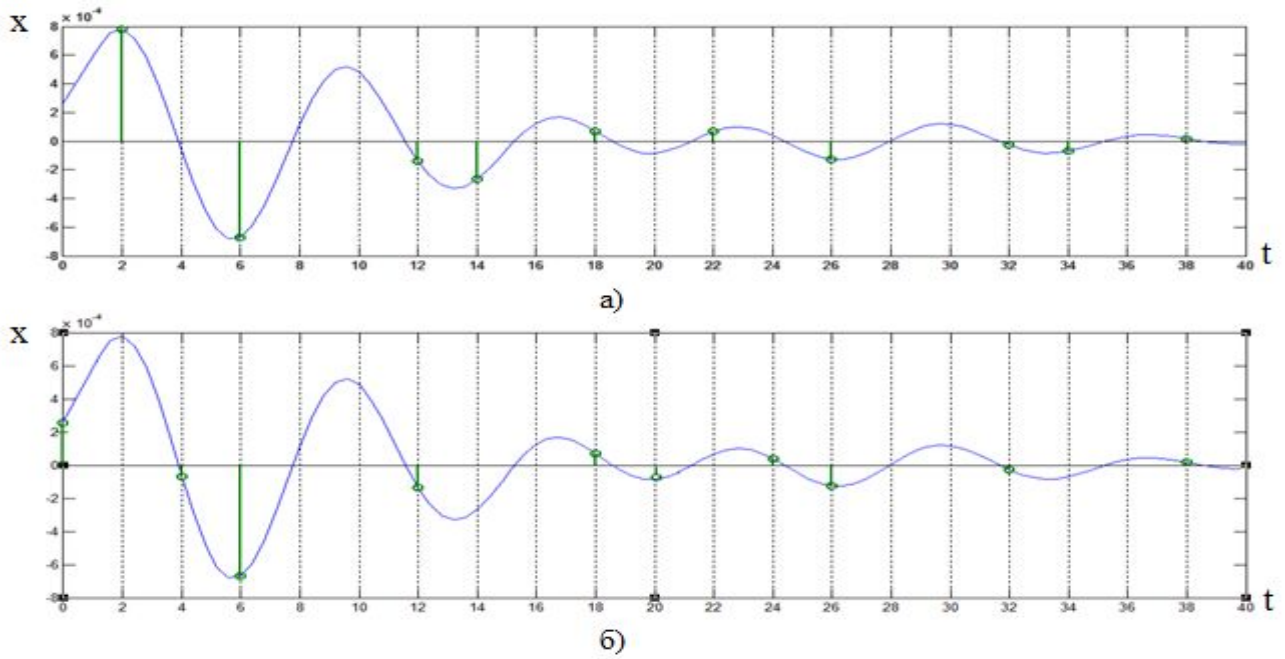


Рис. 1.33 Иллюстрация МС-дискретизации: $L = 20$, $p = 5$,
а) $C = \{2, 6, 12, 14, 18\}$; б) $C = \{0, 4, 6, 16, 18\}$

МС-дискретизация подробно рассмотрена Bresler и Feng в [54], где доказано, что при ее использовании можно гарантировать восстановление многополосного сигнала (multiband signal [134]), имеющего спектр $S(f)$

$$S(f) = \begin{cases} S_1, & f_1 \leq f \leq f_2, \\ S_2, & f_3 \leq f \leq f_4, \\ \vdots & \\ S_K, & f_{K-1} \leq f \leq f_K, \\ 0, & \text{при } f \in]f_2, f_3[\cup]f_4, f_5[\cup \dots \cup]f_{K-2}, f_{K-1}[, \end{cases} \quad (1.26)$$

где $f_1 < f_2 < f_3 < f_4 < \dots < f_{K-1} < f_K$, если минимальная частота дискретизации $f_d^{\{\min\}} = (f_2 - f_1) + (f_4 - f_3) + \dots + (f_K - f_{K-1})$.

6. Адаптивная дискретизация – вид дискретизации, при использовании которой частота дискретизации изменяется адаптивно, подстраиваясь под «мгновенную» частоту сигнала [69,127,79,70]. Другими словами, здесь в процессе регистрации значений дискретного сигнала сохраняется лишь то минимально необходимое число отсчетов, используя которые можно с заданной точностью восстановить исходный сигнал в любой точке соответствующего временного

интервала. При этом локальная плотность отсчетов дискретного сигнала, оказывается зависящей от «мгновенной» частоты аналогового сигнала.

Проведенный обзор известных видов неравномерной дискретизации позволяет сделать вывод о том, что в отличие от PS-дискретизации, существует множество отличных друг от друга способов неравномерной дискретизации. В этой связи представляется актуальным классифицировать виды неравномерной дискретизации. Наличие подобной классификации, позволит выявить укрупненные классы методов неравномерной дискретизации и выделить среди них те классы, при использовании которых точные положения отсчетов на временной оси оказываются точно неизвестными.

Одна из первых классификаций существующих методов неравномерной дискретизации описана в [35]. В ее основу положена модель дискретизируемого непрерывного сигнала. Однако данная классификация охватывает не все известные на сегодняшний момент виды неравномерной дискретизации, кроме того в ней не учитываются некоторые из классификационных признаков неравномерной дискретизации (например, причина возникновения неравномерной дискретизации). С нашей точки зрения более полной оказывается классификация видов неравномерной дискретизации, в основу которой положены причины ее возникновения, представлена на 1.34 [23].

Из рис. 1.34 видно, что неравномерную дискретизацию можно разделить на три класса:

1. адаптивная дискретизация;
2. рекуррентная (периодически неравномерная) дискретизация;
3. стохастическая дискретизация (которая может быть как преднамеренной, так и непреднамеренной), включающая в себя дискретизацию с флуктуирующей частотой, аддитивную стохастическую неравномерную дискретизацию и дискретизацию со случайными пропусками отсчетов.

Также неравномерную дискретизацию можно классифицировать в зависимости от наличия или отсутствия информации о точном положении дискретных отсчетов во времени (рис. 1.35). Например, если неравномерная дискретизация вводится умышленно (радиолокационные станции с синтезированной апертурой [46,96]) то мы должны точно знать положения отсчетов во времени. С другой стороны, понятно, что точно знать местоположение на временной оси дискретных отсчетов, подверженных случайным флуктуациям, невозможно.

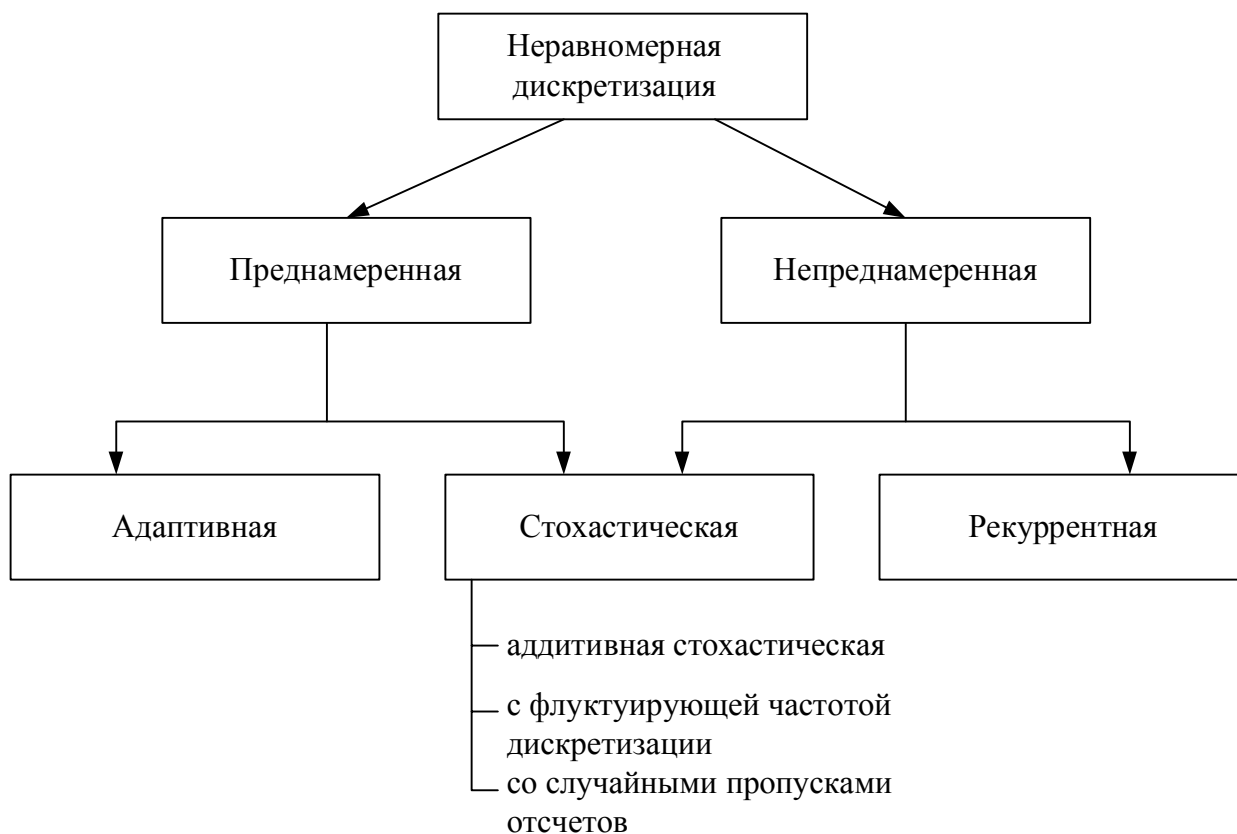


Рис. 1.34 Классификация способов неравномерной дискретизации по причине возникновения

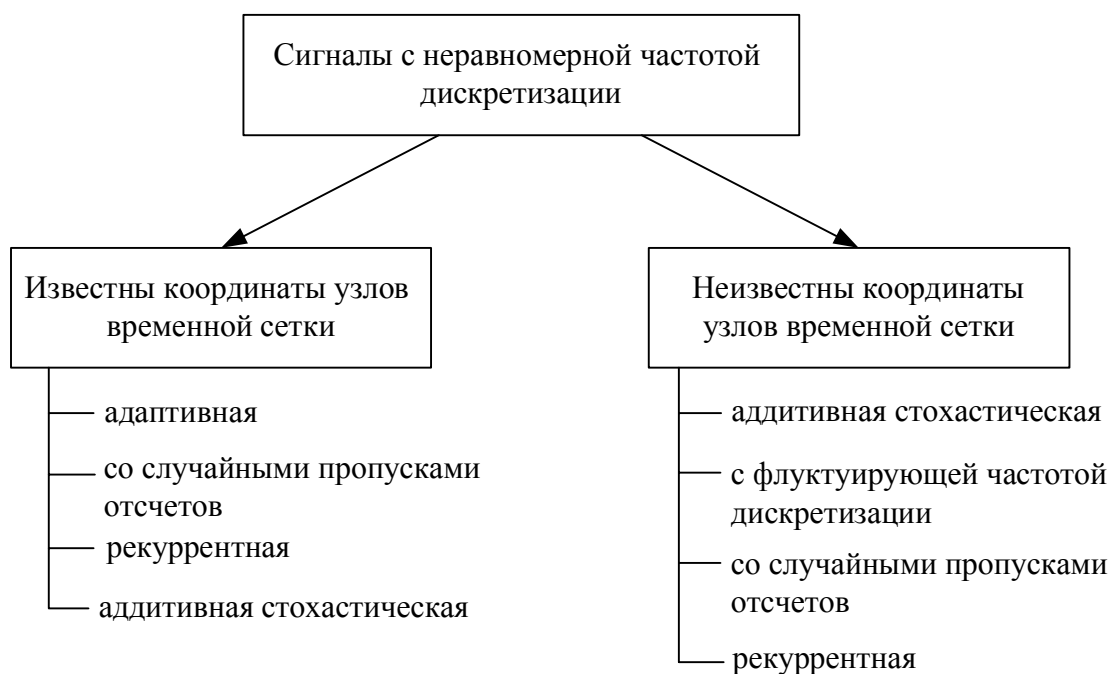


Рис. 1.35 Классификация неравномерной дискретизации по знанию точного местоположения отсчетов

Анализ предложенных классификаций видов неравномерной дискретизации позволяет сделать вывод о том, что сигналы с неизвестными координатами узлов временной сетки возникают только при стохастической и рекуррентной неравномерной дискретизации, и, соответственно ограничить рассмотрение методов восстановления сигналов, дискретизированных с неравномерной частотой данных типов.

1.2 Причины возникновения и примеры реальных неравномерно дискретизированных сигналов с неопределенными значениями координат узлов

Рассмотрим причины возникновения неравномерно дискретизированного сигнала с неопределенными значениями координат узлов в канале высокоскоростного аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

В современных системах передачи данных неуклонно растут требования к скорости аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП). Одним из ключевых факторов выполнения данных требований является наличие генератора синхросигнала высокого качества с низким значением джиттера (например, для современных широкополосных систем передачи необходимо, чтобы синхросигнал имел значение джиттера не более порядка нескольких пикосекунд). Действительно, известно, что джиттер синхросигнала при дискретизации накладывает фундаментальные ограничения на максимальные значения отношения сигнал/шум, достижимые при использовании данной системы дискретизации [84,83,135,1].

В реальной ситуации причин, порождающих фазовое дрожание отсчетов, может быть множество:

1. вариации в генераторе синхросигнала (даже генератор с кварцевой стабилизацией частоты не дает идеальный сигнал - он использует активный элемент, который включает микросхему с зашумленной логической схемой);
2. вариации в тракте передачи (синхросигнал очень уязвим перед взаимными помехами всех видов);
3. фазовый шум самого АЦП или ЦАП.

Обычно при описании характеристик АЦП джиттер определяют через апертурную неопределенность (Aperture Jitter, AJ), которая обозначает нестабильность апертурной задержки во времени, вызванная нестабильностью и паразитным модулированием фазы синхроимпульсов, паразитными шумами на шинах заземления и питания. Следует отметить, что апертурная неопределенность является лишь общим

источником шума в схеме АЦП, в то время как среднее значение джиттера в реальных условиях определяется влиянием и других факторов. В результате влияние АЖ на фактический диапазон изменения джиттера в используемой схеме дискретизации часто является наименьшим из них.

Структурно аналого-цифровой преобразователь изображен на рис. 1.36. В результате джиттера, обусловленного случайными вариациями синхросигнала, значения входного сигнала $x(t)$ оказываются измеренными в узлах НВС $t_i = iT + \tau_i$, $\tau_i \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, (рис. 1.37а). На практике ДС, получаемый на выходе АЦП, в большинстве случаев считают PS-сигналом, поскольку точные значения джиттера τ_i неизвестны. Как следствие, при дальнейшей обработке такого сигнала возникает ошибка дискретизации (рис. 1.37б).

Известно, что на частотах дискретизации 1 ГГц и более, джиттер ограничивает эффективное число бит (Effective Number of Bits, ENOB) АЦП. Например, 8 битный АЦП ATMEL's TS8388, работающий на частоте дискретизации 1 ГГц, из-за искажений, обусловленных джиттером, имеет по факту значение ENOB равное 7.1 бит [155]. Отметим, что задача реализации АЦП с ENOB > 6.5 на высоких частотах (более 1 ГГц) на микросхеме КМОП СБИС оказывается весьма сложной [130].



Рис. 1.36 Аналого-цифровой преобразователь

Рассмотрим причины возникновения JRS-сигнала с неопределенными значениями координат узлов ВС на выходе набора АЦП, работающих параллельно с временным разделением. Актуальность использования подобных устройств обусловлена сложностью технической реализации высокочастотных (сотни МГц и выше) АЦП, обеспечивающих требуемую точность измерения мгновенных значений сигналов (например, 6 битный АЦП с частотой дискретизации 1.3 ГГц [59]). Подобные устройства не удастся создать без использования высоких технологий: транзисторов с высокой подвижностью электронов, оптических технологий, сверхпроводников и др.

[169], и в силу своей сложности эти устройства являются весьма дорогостоящими. При этом зависимость стоимости АЦП, от частоты дискретизации оказывается существенно нелинейной. В этой ситуации задача создания быстродействующих экономичных АЦП, удовлетворяющих требованиям новых стандартов связи является актуальной. Стоит отметить, что помимо сферы телекоммуникаций [20], необходимость в эффективных быстродействующих АЦП также существует в сфере измерений [130].

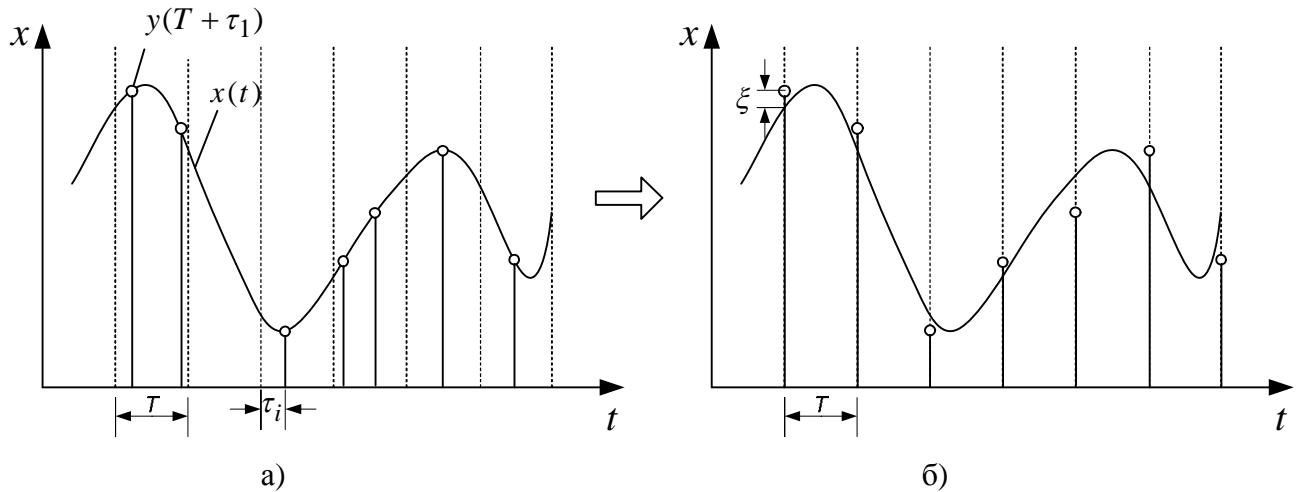


Рис. 1.37 Дискретизация сигнала при тактовой синхронизации с джиттером; б) дискретный сигнал на выходе АЦП

Один из вариантов решения задачи дискретизации высокочастотных сигналов состоит в использовании нескольких низкоскоростных АЦП, работающих параллельно, и далее объединении отсчетов ДС, получаемых на выходе каждого из АЦП, в один цифровой сигнал на выходе [147,64,85]. Такая система, например, может состоять из M каналов, в каждом из которых содержится свой АЦП, работающий на частоте дискретизации f_d / M , удовлетворяющей условию теоремы Котельникова-Найквиста (рис. 1.38) [95]. В результате применения описанной процедуры дискретизации получается M дискретных сигналов $x_{i,k}$, $i = 0, 1, \dots, k = \overline{1, M}$, заданных на временных сетках $t_{i,k} = \tau_k + i \cdot M / f_d$, $\tau_k = k / f_d$. После объединения сигналов $x_{i,k}$ в один, как очевидно, можно получить дискретный сигнал с частотой дискретизации f_d , по значениям которого далее можно восстановить исходный непрерывный сигнал $x(t)$.

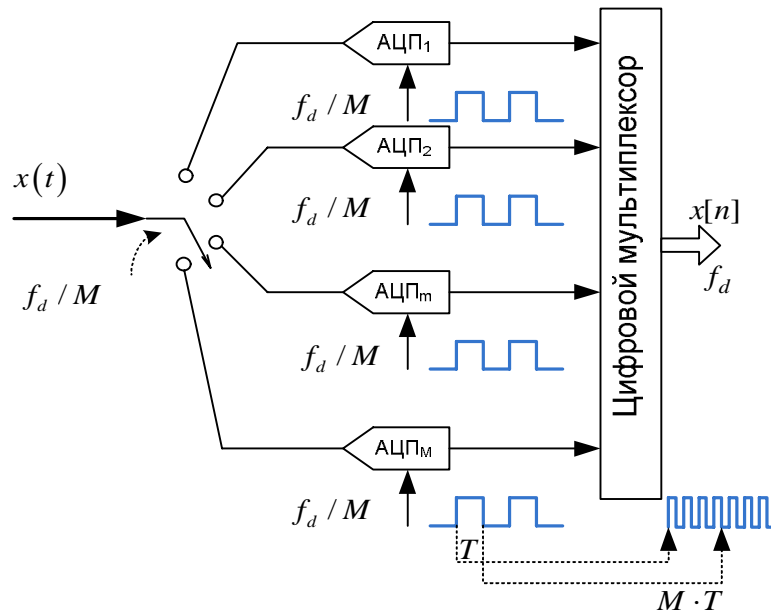


Рис. 1.38 Система, состоящая из M аналого-цифровых преобразователей, работающих параллельно с временным разделением

Однако на практике оказывается достаточно сложно обеспечить абсолютно устойчивую синхронизацию АЦП, поэтому в результате объединения ДС, полученных с выхода M низкоскоростных АЦП, получают PNS-сигнал, заданный на НВС

$$t_{i,k} = \tau_{i,k} + \frac{M}{f_d} i, \quad \tau_{i,k} = \frac{k}{f_d} + \delta_{i,k} \quad (\text{рис. 1.39}).$$

Отметим, что большинство известных методов цифровой обработки сигналов в явной или неявной форме заложено предположение о равномерной дискретизации обрабатываемого сигнала (например, дифференцирование, интегрирование, Фурье-анализ, вейвлет-анализ и т.д.), поэтому возникает необходимость предварить применение выбранного метода обработки сигнала вычислением на основе отсчетов исходного PNS-сигнала значений ДС в узлах выбранной РВС. Для восстановления PNS-сигнала, в свою очередь, необходимо привлекать методы оценивания неизвестных значений координат узлов ВС, в которых произведены измерения значений PNS-сигнала (см. например [88,115]).

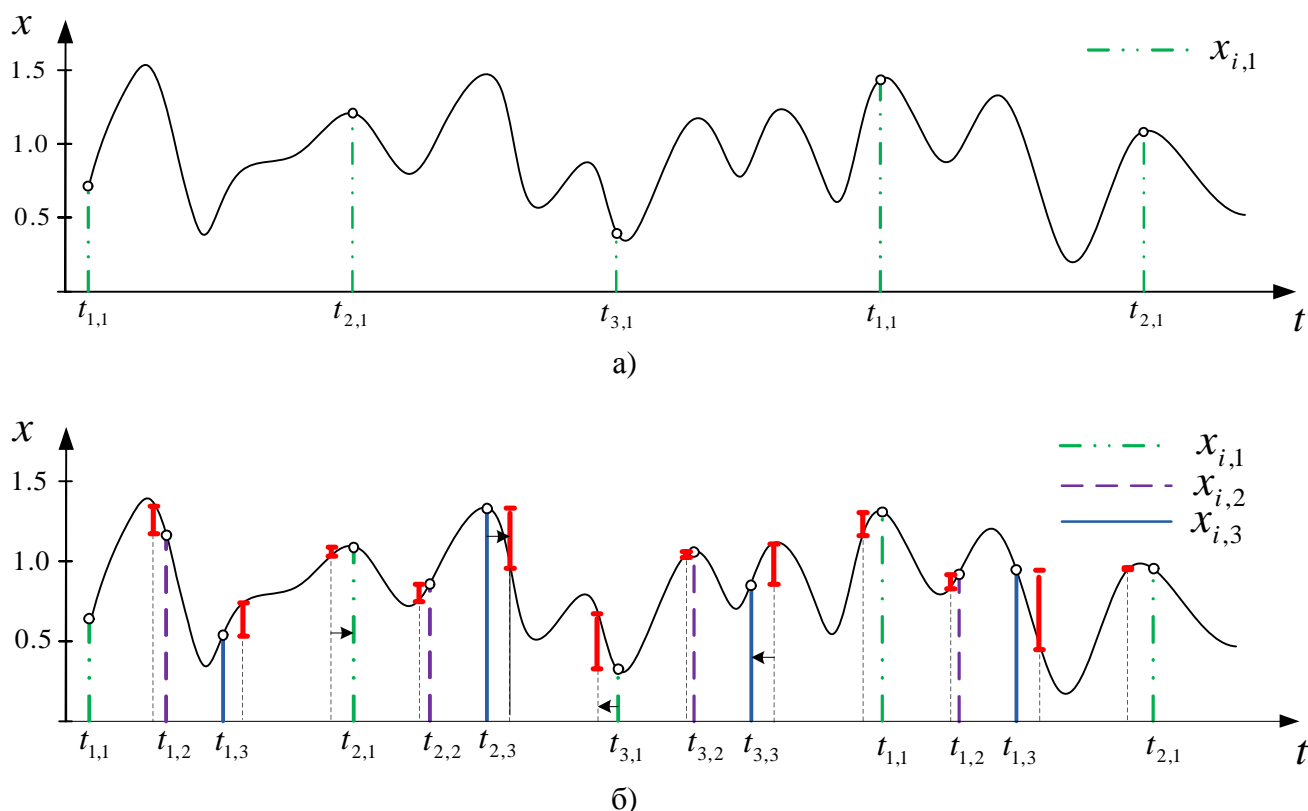


Рис. 1.39 Многоканальная дискретизация: а) дискретный сигнал с выхода первого АЦП с $f_d = 2F_{\max} / K$; б) дискретный сигнал, объединенный с трех АЦП с $f_d = 2F_{\max}$

Сигналы с НЧД используют в самых различных областях радиотехники и телекоммуникаций, например [35,9]:

- при стохастическом и квазистохастическом кодировании;
- в синхронных многоканальных системах передачи информации с временным уплотнением, в асинхронно-адресных системах связи, в системах передачи информации с многостанционным доступом;
- в системах передачи информации с мобильных объектов последовательный регулярный опрос центральным устройством вызывных зон, в которых случайным образом может находиться объект, приводит к нерегулярному потоку канальных отсчетов;
- в спутниковых системах связи (в особенности при связи с самолетами) необходимо учитывать влияние на регулярность приема сообщений изменения времени запаздывания непрерывного (из-за взаимного перемещения абонентских станций и ретранслятора) и скачкообразного (из-за переключения ретрансляторов) и т.д.

Дискретизация с флуктуирующей частотой и аддитивная стохастическая неравномерная дискретизация и активно используются в системах обработки сигналов

без наложения спектров (Digital Alias-free Signal Processing (DASP) System) [50,132]. Данные системы позволяют восстанавливать сигналы при частоте дискретизации меньшей, чем частота Найквиста, и поэтому особо важны в радиосвязи при обработке широкополосных высокочастотных сигналов.

Неравномерная дискретизация возникает также в измерительных системах, в которых используется множество датчиков K и впоследствии зарегистрированные каждым из них сигналы объединяются в один общий исходный сигнал (рис. 1.39) [102]. Подобные ДС получают, например, при звукозаписи в звукопоглощающей комнате, в подводной акустике и т.д. Здесь процесс поступления сигнала от точечного источника на k -ый датчик может интерпретироваться как сигнал с выхода одномерного фильтра $\alpha_k \cdot \delta(t - \tau_k)$, где коэффициенты α_k и задержки во времени τ_k определяются относительным расстоянием между источником и датчиком, а также физическими свойствами среды [86]. Сигналы, полученные от различных датчиков сильно коррелированы друг с другом, т. к. по сути они являются версиями того же самого сигнала, прошедшими через фильтр с неизвестными параметрами. Поэтому, каждый сигнал с выхода каждого датчика можно дискретизировать на частоте меньшей частоты Найквиста, которая, однако, достаточна для восстановления объединенного сигнала в центральном декодере.

Еще одним примером системы с НЧД является устройство, схема функционирования которого представлена на рис. 1.40. Подобные устройства используются, например, при получении из набора смещенных друг относительно друга двумерных изображений с низким разрешением двумерного изображения с более высоким разрешением [125,161]. В этом случае фильтр в каждом канале может быть представлен как $\alpha_k \cdot \delta(t_1 - \tau_k, t_2 - \xi_k)$, где коэффициенты α_k , характеризуют яркость соответствующих пикселей на k -ом изображении, а коэффициенты τ_k , ξ_k – относительные сдвиги k -ого изображения, соответственно, вдоль горизонтальных и вертикальных осей.

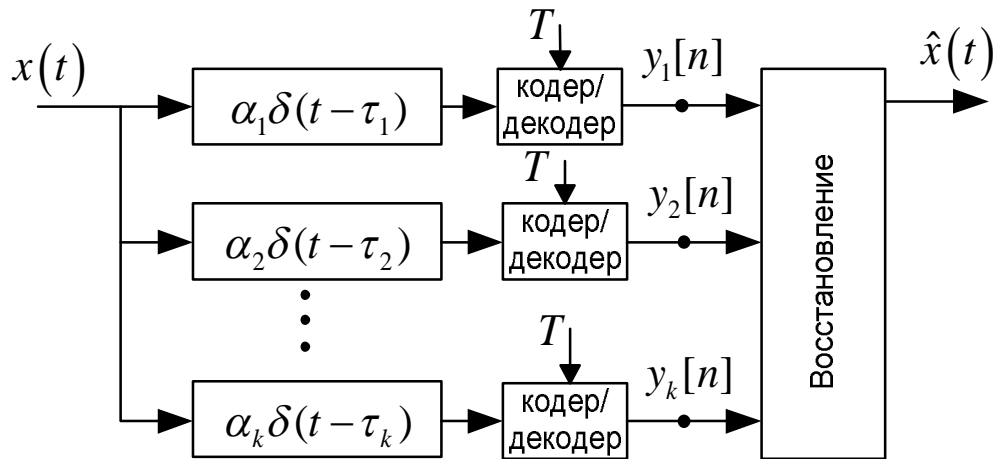


Рис. 1.40 Схема формирования многоканальной дискретизации с неизвестными параметрами канала усиления α_k и джиттера τ_k

Модели ДС с НЧД используются при описании сигналов, получаемых в следующих системах.

1. В измерительных системах с пространственно распределенными системами информационных датчиков. Здесь неравномерная дискретизация обусловлена целым рядом причин, в том числе: погрешностью измерения координат точек, в которых расположены узлы сенсорной сети; особенностями геометрии окружающей пространства, которые оказывают влияние на конфигурацию сетевых элементов [126,77] и т.д. В результате требуется восстанавливать сигнал, на основе набора отсчетов, полученных с информационных датчиков, расположенных в пространстве нерегулярно. Подобные сенсорные сети применяются в системах мониторинга параметров океана, использующих буйки на поверхности воды [153], при подводных роботах, проводимых на различных глубинах [53,57], в парашютных радиозондах или автоматических платформах [103], в парадигме «умной пыли» [91], оптических фурье-спектрометрах [154].

2. В системах аудиозаписи: испорченные аудиозаписи есть ДС с пропущенными отсчетами, для которых оказываются неизвестными, как их точные значения, так и точные положения на временной оси [78].

3. В системах измерения параметров медленно изменяющихся во времени процессов, например, при измерении температуры тех или иных объектов в течение длительных интервалов наблюдений. Здесь для сокращения объемов получаемой информации контролируют изменения измеряемого параметра в последовательные моменты времени и только при превышении заданного порога сохраняют значения

данного параметра и момент времени его достижения. При этом также может адаптивно изменяться число уровней квантования (адаптивная дельта-модуляция, основанная на неравномерной дискретизации) [80] в зависимости от величины изменения.

4. В системах сжатия данных [173].

5. В задачах обработки экспериментально собираемой информации, например, в теплофизических, океанологических и океанографических исследованиях; в медицине при исследовании вариабельности сердечного ритма [60,94,137,3]; в лазерной доплеровской анемометрии при измерении скорости частиц [45].

Таким образом, проведенный обзор известных видов неравномерной дискретизации позволяет сделать вывод о том, что в отличие от равномерной дискретизации, существует большое число отличных друг от друга способов неравномерной дискретизации. Анализ предложенных классификаций видов неравномерной дискретизации показывает, что ДС с неизвестными координатами узлов временной сетки возникают при стохастической и рекуррентной неравномерной дискретизации. Методы восстановления сигналов, на основе ДС, заданных в узлах с НВС рассматриваются в следующем разделе.

1.3 Методы восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации

Из проведенного выше анализа видов НЧД понятно, что существуют две отличные друг от друга постановки задачи восстановления ДС с НЧД.

Задача 1. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру дискретного сигнала $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_K\}$, заданного на НВС $t_k \in \{t_0, t_1, \dots, t_K\}$. Необходимо по таблице $[t_k, x_k]$ данным наборам произвести восстановление сигнала в узлах заданной равномерной временной сетки.

Задача 2. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру дискретного сигнала $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_K\}$, заданного на НВС. При этом соответствующие значения координат отсчетов $t_k \in \{t_0, t_1, \dots, t_K\}$ точно неизвестны, но известны период дискретизации в отсутствие джиттера частоты дискретизации и статистические характеристики джиттера. Необходимо восстановить значения сигнала в узлах заданной равномерной временной сетки.

Проблема восстановления ДС является одной из основных в цифровой обработке сигналов. Разработка методов ее решения применительно к PS-сигналам была начата в работах Котельникова, Шеннона, Найквиста, Уиттакера [157].

Напомним, следуя [17], основополагающую теорему теории восстановления PS-сигнала, доказанную Котельниковым и несколько позже Шенноном.

Теорема 1. Аналоговый сигнал $x(t)$, имеющий конечный ограниченный по ширине спектр $[0, f_c]$, может быть однозначно и без потерь восстановлен по дискретным отсчетам, взятым с частотой $f_d > 2f_c$. Значения восстанавливаемого сигнала вычисляются по формуле:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T}(t - kT) \right]}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}, \quad (1.27)$$

где $T = \frac{1}{f_d}$ – период дискретизации.

Начиная с середины XX в. в научной литературе активно обсуждаются различные методы восстановления ДС с НЧД (non-uniform sampling, irregular sampling). По-видимому, одним из первых исследователей в этой области был Янь [172]. В 1956 г. он рассмотрел ДС, у которого конечное число отсчетов было расположено не через равные промежутки времени, но в моменты времени, смещенные относительно узлов равномерной временной сетки (неравномерная дискретизация). Янь доказал, что, несмотря на неравномерность временной сетки, ограниченный по спектру сигнал можно полностью восстановить и предложил метод восстановления данного дискретного сигнала. Отметим, что дискретный сигнал, изученный Янем, в соответствии с современной терминологией относится к классу дискретных сигналов с рекуррентной неравномерной дискретизацией.

В 1959 г. Шапиро и Сильверман [145] ввели новые виды стохастической неравномерной дискретизации: аддитивную дискретизацию и дискретизацию с флуктуирующей частотой.

В 1953 г. Black доказал следующую теорему о НЧД (см. [47]):

Теорема 2. Аналоговый сигнал $x(t)$, имеющий конечный ограниченный по ширине спектр $[0, f_c]$, представленный множеством упорядоченных во времени отсчетов, заданных в узлах НВС, может быть восстановлен, если для любого

временного интервала отсчетов в единицу времени f_d («мгновенная» частота дискретизации) удовлетворяет условию $f_d(t) > 2f_c$.

Заметный вклад в теорию ДС с НЧД также внесли отечественные исследователи. В 1982 г. Горелов [9] рассмотрел теорию восстановления непрерывных случайных процессов, дискретизированных по времени случайным образом, при случайном же времени передачи отсчетов в системе связи. Он использовал теорию случайных потоков однородных событий (случайных точечных процессов) к потокам отсчетов непрерывных сообщений, рождающихся в процессе дискретизации в системах передачи информации (СПИ). В [9] рассмотрен широкий круг вопросов, в том числе: описан достаточно обширный набор моделей потоков и приведены примеры реальных потоков, возникающих в СПИ; сформулирован тезис о возможности представления части дискретной системы передачи, которая используется для передачи отсчетов с выхода дискретизатора на вход восстанавливающего устройства, в виде системы массового обслуживания; исследована эффективность использования такого представления в условиях анализа точности восстановления в реальном масштабе времени, в частности, в качестве методов восстановления в режиме реального времени рассмотрены интерполяционные и экстраполяционные процедуры нулевого и первого порядка.

Горелов также предпринял попытку получить оценки точности восстановления нерегулярно дискретизированных случайных сообщений. Для этого автор использовал средний квадрат ошибки в виде отклонений между известным модельным сигналом и восстановленным сигналом. В частности, в работе получены оценки погрешности восстановления сигналов имеющих следующие корреляционные функции

$$\tau_x(\tau) = \exp(-4\Delta f |\tau|),$$

$$r_x(\tau) = \exp(-4\pi\Delta f^2 \tau^2),$$

$$r_x(\tau) = \text{sinc } 2\pi\Delta f \tau,$$

где Δf – эффективная ширина спектра сигнала.

Однако на практике приходится иметь дело с ДС, у которых корреляционные функции отличны от корреляционных функций, рассмотренных в [9], поэтому использовать данные оценки оказывается невозможным. Однако, подход оценки точности восстановления сигнала, предложенный автором, является конструктивным, и далее используется в данной работе.

В 1983 г. Билинский и Микелсон [4] рассмотрели условия стохастической неравномерной дискретизации сигналов, при которых возможно их восстановления без искажений, обусловленных наложением спектра, и показали, что необходимым условием является независимость средней плотности узлов временной сетки от времени.

Прохоров [35] рассматривал алгоритмы восстановления дискретных сигналов, заданных в узлах НВС, а также их функциональных характеристик (корреляционных функций и спектральных плотностей мощности и др.). При этом необходимо отметить, что алгоритмы, предложенные в [35], основаны на предположении о том, что координаты узлов НВС известны абсолютно точно. Анализ данных алгоритмов показывает, что в них, по сути, используются подходы, известные из теории интерполяции функций. Однако, например, для JRS-сигналов возможность использования данных алгоритмов вызывает определенные сомнения. Действительно, с физической точки зрения джиттер, присутствующий при дискретизации, можно трактовать, как априорную неопределенность измерений моментов времени и количественно характеризовать ее значение величиной Δ , т.е. считать t_i в терминах интервального анализа [15] интервальными числами $-[t_i - \Delta/2, t_i + \Delta/2] = [t_i]$. Неопределенность измерения значений координат временной сетки, в свою очередь, приводит к возникновению соответствующей неопределенности значений дискретного сигнала Δx_i , $i = \overline{1, N}$ (рис.1.41). В этой связи необходимо проведение целенаправленных исследований данного вопроса и получение оценок точности восстановления JRS-сигналов с помощью алгоритмов, описанных в [35].

Далее в главе рассмотрены методы восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации, заданных в узлах временной сетки с известными точно и неизвестными точно значениями координат узлов.

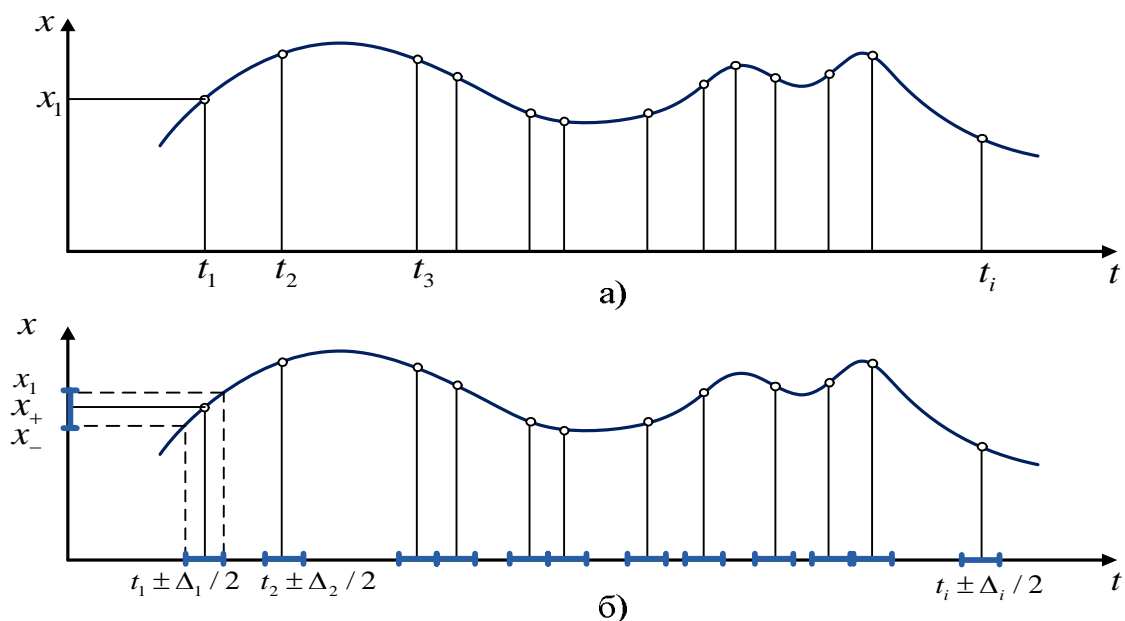


Рис.1.41 Графики дискретных функций, заданных на неравномерной временной сетке:
а) неравномерная дискретизация; б) неравномерная дискретизация с дрожанием

1.3.1 Методы восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации с известными значениями координат узлов временной сетки

В 90-х гг. XX в. появилось большое количество работ зарубежных авторов, в которых были предложены различные методы восстановления ДС с НЧД, основанные на тех или иных итерационных процедурах, (см., например, работы Марвасти [111], Strohmmer [148], Cenker, Feichtinger [58] и др.). Среди данных методов наиболее известным является метод Марвасти [111], в основе которого лежит следующее итерационное уравнение:

$$x_k(t) = x_{k-1}(t) + \lambda D(x(t) - x_{k-1}(t)), \quad (1.28)$$

где λ – параметр, отвечающий за скорость сходимости приближающей функции к исходному сигналу; $x(t)$ – исходный сигнал; $x_k(t)$ – результат k -ой итерации, при $x_0(t) = 0$; D – оператор фильтра нижних частот.

В первое десятилетие XXI в. методы решения рассматриваемой задачи также являлись предметом активных исследований [19]. Среди работ, появившихся в это время, следует отметить работы Tuncer [156], развивающего специальный блочный метод для интерполирования сигнала на равномерную временную сетку через

дискретное преобразование Фурье; Senay [141], развивающего метод восстановления ДС с помощью дискретных вытянутых сфероидальных последовательности и др. [140,81,97].

Рассмотрим наиболее известные методы восстановления ДС с НЧД более подробно, в том числе: метод адаптивных весов [68]; метод вытянутых сфероидальных волновых функций $\psi_n(t)$ (Prolate Spheroidal Wave Functions, PSWF) [141,142]; интерполяционные полиномы Лагранжа [98] и Ньютона [26]; блочный метод Tuncer [156]; метод сплайн-интерполяции [36]. Данные методы реализованы в пакете MATLAB виде пакета расширения «MATLAB Non-uniform sampling TOOLBOX» [27], содержащий графический интерфейс пользователя [25].

1) Метод адаптивных весов, предложенный Feichtinger, Grochenig и Strohmer [68]. В данном методе предполагается, что имеется последовательность координат узлов $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1$, $r \geq 2M + 1$, где M – ширина спектра сигнала, и соответствующая последовательность значений ДС $x_i = x(t_i)$.

Метод адаптивных весов реализуется следующей последовательностью действий.

I. Вычисление весовых коэффициентов:

$$w_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_{i-1}), \quad (1.29)$$

где $t_0 = t_r - 1$, $t_{r+1} = t_1 + 1$,

II. Формирование теплицевой матрицы T_w

$$(T_w)_{lk} = (T_w)_{l-k} = \sum_{l=1}^r w_l e^{-2\pi i(l-k)t_l}, \quad |l|, |k| \leq M, \quad (1.30)$$

III. Формирование вектора b_k

$$b_k = \sum_{l=1}^r x(t_l) w_l e^{-2\pi i k t_l}, \quad |k| \leq M, \quad (1.31)$$

IV. Решение матричного уравнения $a \cdot T_w = b$:

$$a = T_w^{-1} b, \quad (1.32)$$

V. Вычисление значений восстановленного сигнала $x(\tilde{t})$ в узлах временной сетки \tilde{t}

$$x(\tilde{t}) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{2\pi j k \tilde{t}}. \quad (1.33)$$

2) Метод восстановления сигнала при помощи вытянутых сфероидальных волновых функций $\psi_n(t)$ (Prolate Spheroidal Wave Functions, PSWF), являющихся собственными функциями интегрального уравнения

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T}^T \psi_n(x) S(t-x) dx, \quad (1.34)$$

где λ_n – собственная величина соответствующая собственной функции $\psi_n(t)$, $S(\cdot)$ – функция $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Данные функции в дискретной области порождают дискретные вытянутые сфероидальные последовательности $\psi_n(t_k)$ (Discrete Prolate Spheroidal Sequences, DPSS).

Переход от неравномерной сетки t_i к равномерной временной сетке \hat{t}_i задается выражением

$$x(\hat{t}_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(t_i) \psi_m(t_i) \psi_m(\hat{t}_i), \quad (1.35)$$

где N – число дискретных отсчетов;

$M-1$ – номер последнего члена последовательности функций $\psi_n(t_k)$. M выбирается из условия

$$\omega_c T = \frac{2\pi(M-1)}{N} \leq \pi, \quad (1.36)$$

где $\omega_c = 2\pi f_c$, f_c – верхняя частота спектра сигнала, T – период дискретизации, то есть $M \leq \frac{N}{2} + 1$.

3) Методы восстановления с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона. Отметим, что из известных интерполяционных формул (Бесселя, Стирлинга, Стеффенсена, Эверетта, Гаусса, Чебышева и других) для восстановления ДС с НЧД оказывается возможным использовать интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона, так как другие интерполяционные полиномы требуют задания узлов интерполяции на равномерной временной сетке.

Интерполяционная формула Лагранжа записывается в следующем виде:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i l_i(t), \quad (1.37)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(t) = \prod_{j=0, i \neq j}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j}. \quad (1.38)$$

В случае неравноотстоящих узлов дискретизации интерполяционная формула Ньютона имеет следующий вид:

$$x_n(t) = x_0 + \delta x_0(t-t_0) + \delta^2 x_0(t-t_0)(t-t_1) + \dots + \delta^2 x_0(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1}), \quad (1.39)$$

где разностные отношения первого порядка:

$$\delta x_{n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (1.40)$$

Разностные отношения второго порядка:

$$\delta^2 x_{n-2} = \frac{\delta x_{n-1} - \delta x_{n-2}}{t_n - t_{n-2}} \quad (1.41)$$

В общем виде разностные отношения записываются в следующем виде:

$$\delta^k x_i = \frac{\delta^{k-1} x_{i+1} - \delta^{k-1} x_i}{t_{i+k} - t_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.42)$$

Как и в случае равномерной дискретизации, степень многочлена определяется числом разностных отношений. Если разностные отношения n -го порядка постоянны, то функция представляет собой многочлен n -ой степени. Данное свойство разностных отношений позволяет в случае интерполяции многочленами существенно упростить вычисления.

4) Метод интерполяции кубическими сплайнами. Этот метод получил широкое применение на практике, так как кубический сплайн является интерполирующей функцией, имеющей минимальную кривизну [36].

Обозначим через t_i – узлы интерполяции; $h = (t_{i+1} - t_i)$ – разность моментов времени соседних отсчетов. На каждом i -ом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ восстанавливаемая функция аппроксимируется полиномом третьей степени $S_i(t)$:

$$S_i(t) = a_i + b_i(t-t_i) + \frac{c_i}{2}(t-t_i)^2 + \frac{d_i}{2}(t-t_i)^3,$$

тогда

$$S_i(t_i) = a_i, \quad S'_i(t_i) = b_i, \quad S''_i(t_i) = c_i,$$

коэффициенты которого находятся из условия непрерывности сплайна и его первой и второй производных:

$$S_i(t_i) = x_i,$$

$$S_i(t_{i-1}) = S_{i-1}(t_{i-1}),$$

$$S'_i(t_{i-1}) = S'_{i-1}(t_{i-1}),$$

$$S''_i(t_{i-1}) = S''_{i-1}(t_{i-1}),$$

вычисляются по следующим формулам:

$$a_i = x(t_i),$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6 \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{h_{i+1}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{h_i} \right),$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i},$$

$$b_i = \frac{1}{2} h_i c_i - \frac{1}{6} h_i^2 d_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{h_i} = \frac{h_i (2c_i + c_{i-1})}{6} + \frac{x_i - x_{i-1}}{h_i},$$

5) Блочный метод для интерполирования сигнала на равномерную временную сетку. Данный метод впервые был предложен в [156] для решения следующей задачи.

Предположим, что s_{nu} – ДС, заданный в узлах НВС

$$t_n = nT + \tau_n, \quad n = \overline{1, N},$$

где $\tau_n = \lfloor p(n) \rfloor \frac{T}{L}$, $p(n)$ – последовательность чисел равномерно распределенных в интервале $[0, L)$; $\lfloor \cdot \rfloor$ – знак, означающий целую часть числа. ДС s_{nu} получен путем нелинейной децимации дискретного сигнала $s_l(mT)$, $m = \overline{1, M}$, с шагом L , $M = N \cdot L$. Требуется вычислить значения сигнала $s_u(nT)$, заданного на равномерной временной сетке $\tilde{t}_n = nT$.

В [156] показано, что s_u является решением уравнения

$$\frac{1}{NM} W_1^H H C_3 W_2 s_u = C_2 s_{nu}, \quad (1.43)$$

где W_1^H – $M \times M$ матрица, сопряженная по Гильберту, матрице ДПФ,

C_2 – матрица $M \times N$, $C_2(i, j) = 1$, $0 \leq j \leq N-1$, $i = L \cdot j + p(j)$,

C_3 – матрица $M \times N$, $C_3(0, 0) = 1$, $C_3(j, j) = C_3(M-j, N-j) = 1$, $0 \leq j \leq N^-$,

$N^- = N/2$, если N четное, и $N^- = (N-1)/2$, если N нечетное,

$H - M \times M$ матрица $h_{nu}(k)$, образованная от ДПФ функции дискретизации $h(t)$,
 $k = \left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor, \quad 1 \leq m \leq M;$

$W_2 - N \times N$ матрица ДПФ.

б) Метод восстановления периодических сигналов, изучавшийся в [11,7,105]. Данный метод является расширением метода Яня [172], разработанного для ДС, получаемых при рекуррентной (периодически неравномерной) дискретизации периодических сигналов. При его использовании можно восстановить периодический сигнал $x(t_k)$ с периодом равным T_c , по его значениям, заданным в узлах неравномерной временной сетки $t_k, k = \overline{1, N}, N > 2M + 1, M$ – число спектральных гармоник (ширина спектра сигнала), в узлах равномерной временной сетки $\tilde{t}_k, k = \overline{1, N}$ по формуле:

$$x(\tilde{t}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) h_k(\tilde{t}_k), \quad (1.44)$$

где

$$h_k(\tilde{t}_k) = \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^N + (1 + (-1)^N) \cos \left(\frac{\pi(\tilde{t}_k - t_k)}{T_c} \right) \right) \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq k}}^{N-1} \frac{\sin \left(\frac{\pi(\tilde{t}_k - t_q)}{T_c} \right)}{\sin \left(\frac{\pi(t_k - t_q)}{T_c} \right)}. \quad (1.45)$$

Следует упомянуть цикл работ, посвященных исследованию данного метода, выполненных Ефимовым, Бондаренко, Каспировичем, Резником [11,7,13,12,5,10]. В этих работах получены соотношения для дисперсии ошибки восстановления при некоррелированном амплитудном шуме, установлены ограничения, присущие данному методу, на основе анализа результатов компьютерного моделирования получены оценки погрешности восстановления ДС.

Стоит отметить также работу Бондаренко и Касперовича [6], в которой авторы исследовали особенности применения итерационного метода Марвасти в условиях, когда частота дискретизации близка к частоте Найквиста и отклонения отсчетов от соответствующих узлов РВС велики.

Таким образом, проведенный анализ методов восстановления ДС, заданных в узлах НВС, позволяет сделать вывод о том, что их авторы, априори полагают, что значения узлов ВС известны точно. Следовательно, данные методы предназначены для решения классической задачи восстановления ДС с известными значениями координат

узлов по таблице $[x_i, t_i]$ (задача 1) и, вообще говоря, не адаптированы для восстановления ДС с неизвестными значениями координат t_i .

В то же время необходимо отметить, что если, формально, отнести значение ДС x_i , измеренное для некоторого значения интервальной переменной $[t_i]$, к середине соответствующего временного интервала, то задача восстановления данного сигнала по своей постановке оказывается аналогичной Задаче 1. Следовательно, для ее решения можно, потенциально, можно использовать рассмотренные выше методы решения Задачи 1, которые, однако, в рассматриваемом случае с неизбежностью будут иметь некоторую систематическую погрешность, зависящую от неопределенности измерения временной координаты Δ .

В этой связи нахождение границ применимости известных методов интерполяции дискретных сигналов, в задаче восстановления $x(t)$ по значениям дискретного сигнала x_i , измеренное для некоторого значения интервальной переменной $[t_i]$, является актуальным.

1.3.2 Обзор методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, с неизвестными значениями координат узлов

Рассмотрим известные подходы восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными местоположениями отсчетов на временной сетке [33].

Paulo J. S. G. Ferreira и Jose M. N. Vieira (1997 г.) в [73,74] рассмотрели проблему нахождения значений подмножества искаженных неизвестных отсчетов дискретного сигнала с финитным спектром. Они, в том числе, сформулировали следующие задачи.

Задача 1. Известно, что дискретный сигнал $x \in \mathbb{C}^N$, где \mathbb{C}^N – N -мерное комплекснозначное пространство, $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, имеет ограниченную ширину спектра B . Будем считать, что дискретный сигнал x представлен подмножеством упорядоченных во времени отсчетов $\{x_{i \in U_0}\} \setminus \{x_{i \in U}\}$, где $U_0 = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $U = \{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}$ – подмножество позиций n некорректных отсчетов дискретного сигнала x , $n-1 < N-1$. Требуется вычислить значения отсчетов дискретного сигнала $\{x(i)\}_{i \in U}$.

Отметим, что по своей постановке Задача 1, в которой считается, что местоположение искаженных отсчетов на временной оси известны абсолютно точно, оказывается аналогичной задаче интерполяции значений функции, заданной таблично. Описание методов восстановления подобных дискретных сигналов, найти, например, в [73,74,72,123,92].

Задача 2. Известно, что дискретный сигнал $x \in \mathbb{C}^N$, где \mathbb{C}^N – N -мерное комплекснозначное пространство, $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, имеет ограниченную ширину спектра. Также имеется ДС $y \in \mathbb{C}^N$, у которого $x_i = y_i$, кроме $i \in U$, где U неизвестное подмножество множества $U_0 = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Требуется определить U и x , по известным y и B .

Задача 2, напротив, относится к классу задач, в которых точное положение искаженных и/или пропущенных отсчетов неизвестно. Для ее решения Ferreira и Vieira предлагают использовать следующий метод. Обозначим $U = \{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}$ множество номеров некорректных отсчетов дискретного сигнала $x \in \mathbb{C}^N$, ошибку

$$e = x - y, \quad (1.46)$$

где y – измеренный дискретный сигнал. Очевидно, что в (1.46) $e(k) = 0$ при $k \notin U$ и $e(k) \neq 0$ при $k \in U$. Плотность ошибочных отсчетов $\frac{n}{N}$, где N – мощность множества U_0 , а n – мощность множества U , на практике она обычно мала.

Рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{i=0}^n h_i z^i, \quad (1.47)$$

у которого $h_n = 1$, и

$$P(e^{-i\frac{2\pi}{N}i_m}) = 0, \quad (1.48)$$

при $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Обозначим $A = \{j_0, j_1, j_2, \dots\}$ – множество отличных друг от друга целых чисел.

Далее умножая (1.48) на $e(i_m)e^{i\frac{2\pi}{N}i_m j_l}$ и суммируя по m получаем

$$\sum_{k=0}^n h_k \sum_{m=0}^{n-1} e(i_m) e^{-i\frac{2\pi}{N}i_m(k-j_l)} = 0. \quad (1.49)$$

Выражение (1.49) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=0}^n h_k \hat{e}(k - j_l) = 0,$$

где $\hat{e} = F \cdot e$ – дискретное преобразование Фурье ошибки e , которое учитывая, что $h_n = 1$, можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^n h_k \hat{e}(k - j_l) = -\hat{e}(n - j_l). \quad (1.50)$$

Уравнение (1.50) представляет собой систему уравнений вида $A \cdot h = b$, в которой неизвестными являются коэффициенты h_k полинома P . Если мощность множества A меньше n и $j_l = -r + l$ ($l = 0, 1, \dots, n-1$) необходимо знать только $2n$ отсчетов \hat{e} . Если N четное и $r = N/2$, то матрица A является матрицей теплицевой и эрмитовой (что, обеспечивает вещественность корней системы (1.50)),

$$A = \begin{bmatrix} \hat{e}(r) & \hat{e}(r-1) & \dots & \hat{e}(r-n+1) \\ \hat{e}(r+1) & \hat{e}(r) & \dots & \hat{e}(r-n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{e}(r+n-1) & \dots & \dots & \hat{e}(r) \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

а вектор

$$b = -[\hat{e}(r+1) \ \hat{e}(r+2) \dots \hat{e}(r+n)]^T, \quad (1.52)$$

где $h = [h_{n-1} \ h_{n-2} \dots h_0]^T$.

Анализ описанного метода восстановления дискретного сигнала показывает, что необходимым условием его использования, является знание вектора остатков e , вычисляемого в соответствии с (1.46). Однако при обработке реальных сигналов, возможность вычисления данного вектора остатков отсутствует, как правило, а потому его использование на практике оказывается невозможным. Данный вывод также подтверждается тем, что в [73,74] авторы не привели ни одного примера использования предложенного метода для восстановления искаженных значений ДС.

В 1999 г. Р. Marziliano и М. Vetterli [113] предложили подход к решению задачи нахождения неизвестных координат узлов временной сетки по значения ДС с НЧД, соответствующего непрерывному сигналу с ограниченной полосой спектра, для следующих случаев, когда неравномерность дискретизации: 1) обусловлена джиттером; 2) небольшим числом фиксированных смещений временной сетки.

Обозначим через $x = x(N) = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$ – вектор значений дискретного сигнала, у которого максимальный номер гармоники с амплитудой, отличной от нуля, равен L . Тогда X спектр данного сигнала:

$$X = F \cdot x = (X_0, X_1, \dots, X_{L-1}, 0, \dots, 0)^T = DTF_N x, \quad (1.53)$$

где F – $N \times N$ матрица дискретного преобразования Фурье (DTF), определяемая как $\{F_{nm} = W^{(n-1)(m-1)}\}_{n,m=1,\dots,N}$, $W = e^{-j2\pi/N}$.

Задача состоит в нахождении значений координат $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$, $0 < n_i < n_j \leq N-1$, $i < j$ отсчетов с соответствующими значениями $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_K})^T$ в предположении, что

$$2 \leq L \leq K < N.$$

Графическая иллюстрация данной задачи, названной авторами (N, K, L) -проблемой (определить по известному числу отсчетов N ДС y , числу гармоник его спектра L , K номеров отсчетов, образующих множество $N_K = \{n_0, n_1, \dots, n_{K-1}\}$), представлена на рис. 1.42.

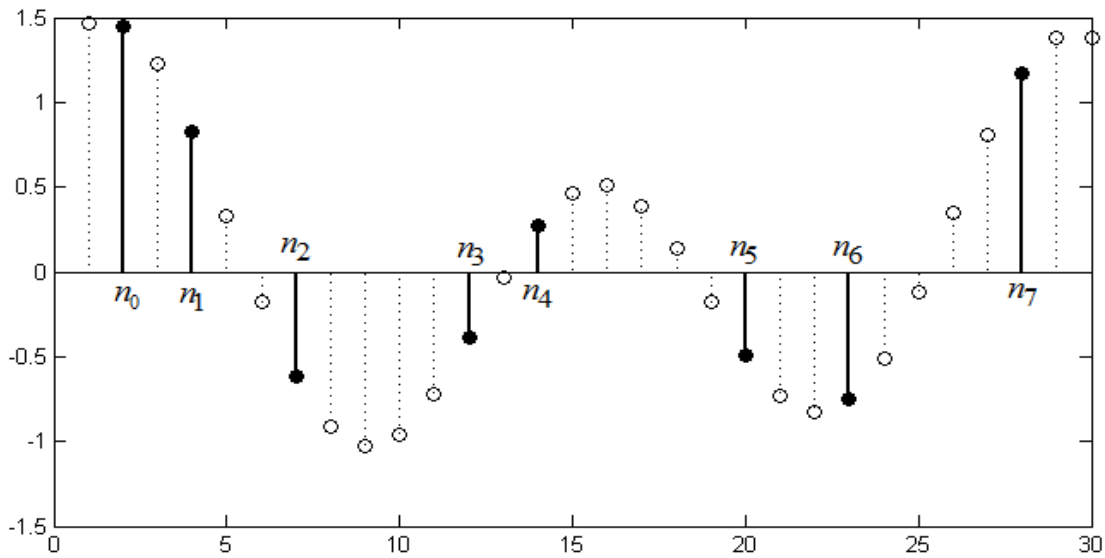


Рис. 1.42 К иллюстрации (N, K, L) -проблемы, $N_K = \{n_0, n_1, \dots, n_8\}$

Р. Marziliano и М. Vetterli дали следующую геометрическую интерпретацию (N, K, L) -проблемы.

Предположим, что x принадлежит подпространству

$$V_L = \text{span}\{f_l\}_{l=0}^{L-1}, \quad (1.54)$$

натяннутому на L первых столбцов матрицы F^{-1} , $F^{-1} = \frac{1}{N} F^*$, где f_l – l -ые столбцы матрицы F^{-1} , $l = 0, \dots, L-1$, $\text{span}\{ \}$ – линейная оболочка системы векторов f_l .

Обозначим через $s_K(n)$ подпространство, натянутое на вектор $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$, :

$$s_K(n) = \text{span}\{e_{n_i}\}_{i=1}^K. \quad (1.55)$$

где n_i , $i = 1, K$ – координаты проекций вектора x_n на соответствующие орты канонического базиса¹ e_i подпространства $s_K(n)$, такие что

$$e_i e_j = \delta_{ij},$$

здесь δ_{ij} – дельта Кронекера.

Следовательно, x_n есть проекция V_L на подпространство $s_K(n)$:

$$x_n \in P(n) = \text{Proj}_{s_K(n)} V_L, \quad (1.56)$$

а n является решением (N, K, L) -проблемы.

В [113] также доказана теорема о том, что если $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ есть решение (N, K, L) -проблемы, то вектор

$$m = n + i = [n_1 + i, n_2 + i, \dots, n_K + i],$$

где $1 \leq i < N - n_K$, также является решением (N, K, L) -проблемы.

Так как матрица Фурье-преобразования F невырожденная, вектор может быть вычислен по следующей формуле:

$$x = F_L^{-1} X = \sum_{l=0}^{L-1} f_l X_l = F_L X_L, \quad (1.57)$$

¹ Напомним, что базис $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ пространства R^n называется каноническим базисом квадратичной формы $F(x) = x(Ax)$, если $\gamma_i(A\gamma_j) = 0$ при $i \neq j$.

где F_L – матрица сформированная набором векторов $\{f_l\}_{l=0}^{L-1}$; $X_L = (X_0, X_1, \dots, X_{L-1})^T$ – ненулевые составляющие спектра X . Следовательно, вектор x принадлежит подпространству $V_L = \text{span}\{f_l\}_{l=0}^{L-1}$. Более того, x_n является матрицей, составленной из строк, в которых отличным от нуля оказывается единственный элемент, соответствующий координате вектора $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$.

Умножим (1.57) слева на матрицу $P_n = (e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_K})^T$, P_n – матрица, проецирующая вектор x на вектор x_n , где e_i – $N \times 1$ векторы канонического базиса пространства $s_K(n)$:

$$x_n = P_n x = P_n F_L X_L. \quad (1.58)$$

Отметим, что, априори, X_L в (1.58) неизвестно, поэтому следует записать выражение, описывающее связь между X_L и наблюдаемыми значениями x_n . Обозначим через $M_n = P_n F_L$ матрицу, составленную из $\{n_i\}_{i=1}^K$ строк и L первых столбцов матрицы F^{-1} , тогда

$$\begin{aligned} x_n &= M_n X_L, \\ M_n^* x_n &= M_n^* M_n X_L, \\ \Rightarrow X_L &= (M_n^* M_n)^{-1} M_n^* x_n. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Для того чтобы проверить является ли последовательность $m = (m_1, m_2, \dots, m_K)$ решением (N, K, L) -проблемы, необходимо убедиться, что $x_n \in \text{Proj}_{s_K(m)} V_L$. С алгебраической точки зрения это условие эквивалентно тому, что

$$x_m = M_m (M_m^* M_m)^{-1} M_m^* x_n, \quad (1.60)$$

равно x_n или

$$(M_m (M_m^* M_m)^{-1} M_m^* - I) x_n = 0, \quad (1.61)$$

где I – единичная матрица.

Таким образом, поиск оптимального решения (N, K, L) -проблемы сводится к решению оптимизационной задачи – поиску минимума функции

$$E(m) = \left\| \left[M_m (M_m^* M_m)^{-1} M_m^* - I \right] x_n \right\|, \quad (1.62)$$

где $\| \cdot \|$ – квадрат евклидовой нормы (1.61).

Для решения оптимизационной задачи авторы рассмотрели возможность использования следующих методов: метод полного перебора, метод случайного поиска и метод циклического покоординатного спуска, из которых на основе анализа результатов численных экспериментов они рекомендуют использовать метод циклического покоординатного спуска, обеспечивающий наибольшую вероятность нахождения глобального, но не локального минимумов (1.62). При этом необходимо отметить, что точность решения нелинейных систем уравнений оптимизационными методами существенно зависит от удачного выбора начального приближения, в то же время рекомендаций по выбору начальных приближений авторами не приведено.

Отметим, что в рассматриваемой постановке эта задача представляет исключительно академический интерес, поскольку на практике оказывается известной только единственная выборка ДС, заданного в узлах сетки с неизвестными значениями координат ее узлов, но не сигнал y . Следовательно, использовать данный метод для восстановления реальных сигналов на практике оказывается практически невозможным.

Далее задача нахождения неизвестных координат узлов временной сетки при использовании конкретных видов неравномерной дискретизации рассмотрена Р. Marziliano и М. Vetterli в [114] (2000 г). (Данная работа является дальнейшим развитием методов, описанных в [113].) Здесь для определения местоположений отсчетов авторы предложили находить решение (N, K, L) -проблемы как решение следующей оптимизационной задачи, имеющей в сравнении (1.62) меньшую вычислительную сложность:

$$E(m) = \left\| \left[F(K, L) \left(F^*(K, L) F(K, L) \right)^{-1} F^*(K, L) - I \right] s \right\|, \quad (1.63)$$

где

$$s = \frac{1}{N} F(N, L) \hat{x}(L),$$

$$F(N, L) = \{F_{nm} = W^{(n-1)(m-1)}\}_{n=1, \dots, N, m=1, \dots, L}, W = e^{-j2\pi/N}$$

$$\hat{x}(L) = DFT_N x.$$

Предложенный метод решения (N, K, L) -проблемы был применен для следующих видов неравномерной дискретизации:

- 1) неизвестная случайная выборка из множества заданных значений дискретного сигнала;
- 2) равномерная дискретизация с неизвестным джиттером;
- 3) рекуррентная (периодически неравномерная) дискретизация со случайным неизвестным сдвигом узлов временной сетки.

Здесь для решения оптимизационной задачи (1.63) авторы использовали методы случайного поиска и циклического покоординатного спуска. Анализ результатов проведенных вычислительных экспериментов позволил сделать авторам следующие выводы:

– для первого вида дискретизации:

- 1) метод циклического покоординатного спуска сходится быстрее метода случайного поиска;

- 2) вероятность нахождения глобального минимума зависит от гладкости сигнала, от числа спектральных гармоник L : чем меньше L в сравнении с числом отсчетов с неизвестными координатами K , тем выше вероятность нахождения правильных местоположений отсчетов;

– для второго вида дискретизации: вероятность нахождения глобального минимума метода циклического покоординатного спуска составляет 0.83, а метода случайного поиска примерно 0.22;

– для третьего вида дискретизации: методы циклического покоординатного спуска и случайного поиска обнаруживают низкую скорость сходимости вычислений к истинному значению глобального минимума.

Отметим, что, во-первых, с практической точки зрения для оценки качества работы вычислительных алгоритмов более целесообразно использовать не вероятность нахождения глобального минимума оптимизационной задачи, но оценивать собственно точность восстановления дискретного сигнала по отсчетам с вычисленными координатами. Во-вторых, в вычислительных экспериментах авторы использовали дискретные сигналы с относительно небольшим числом отсчетов (несколько десятков), в связи с чем, вопрос о возможности восстановления более длинных сигналов за приемлемое время остается открытым.

Помимо рассмотренных выше задач, к задачам восстановления дискретного сигнала заданного в узлах неравномерной временной сетки, значения которых точно неизвестны, также ряд авторов относят задачу о восстановлении потерянных и/или искаженных при передаче пакетов в канале связи, см., например, [112, 6 глава]. Здесь Р.

Marziliano совместно с М. Vetterli для восстановления дискретного сигнала с априори известной шириной спектра M , некоторые из значений которого оказываются пропущенными (irregular sampling), предлагают использовать итерационный алгоритм Паполиса-Гершбера (Papoulis-Gerschberg algorithm), который записывается в виде следующей вычислительной схемы:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \rho_{N_K} x, \\ x^{(i+1)} &= x^{(0)} + \rho_{N \setminus N_K} H_N^{-1} \rho_{N_M} H_N x^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где $N = \{0, 1, \dots, N-1\}$;

N – общее число отсчетов дискретного сигнала,

$x = x(N) = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$ – вектор значений дискретного сигнала,

$N_K = \{n_i\}_{i=1}^K$ – подмножество номеров неизвестных значений;

$N_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$;

H – матрица ДПФ, $\{H_{nm} = W^{(n-1)(m-1)}\}_{n,m=1,\dots,N}$, $W = e^{-j2\pi/N}$;

$$\rho_{N_K} x = \begin{cases} x[n], & \text{если } n \in N_K, \\ 0 & \text{если } n \in N \setminus N_K, \end{cases} \quad \rho_{N_M} X = \begin{cases} X[n], & \text{если } n \in N_M, \\ 0 & \text{если } n \in N \setminus N_M. \end{cases}$$

Блок схема данного алгоритма приведена на рис. 1.43. Из этого рисунка видно, что алгоритм Паполиса-Гершбера реализуется следующей последовательностью действий:

1. Инициализация счетчика числа шагов итераций $i = 0$.
2. Подача на вход вычислительной схемы (1.64) значений дискретного сигнала, длиной N , у которого значения отсчеты с номерами, принадлежащими множеству N_K , $N_K \subset N$, неизвестны:

$$x^{(0)} = \rho_{N \setminus N_K} x = \begin{cases} x[n], & \text{если } n \in N \setminus N_K, \\ 0 & \text{если } n \in N_K. \end{cases}$$

3. Вычисление ДПФ $X = H_N x^{(i)}$.

4. Приравнивание к нулю компонент ДПФ, номера которых находятся за пределами заданной ширины спектра сигнала M :

$$\rho_{N_M} X = \begin{cases} X[n], & \text{если } n \in N_M, \\ 0 & \text{если } n \in N \setminus N_M. \end{cases}$$

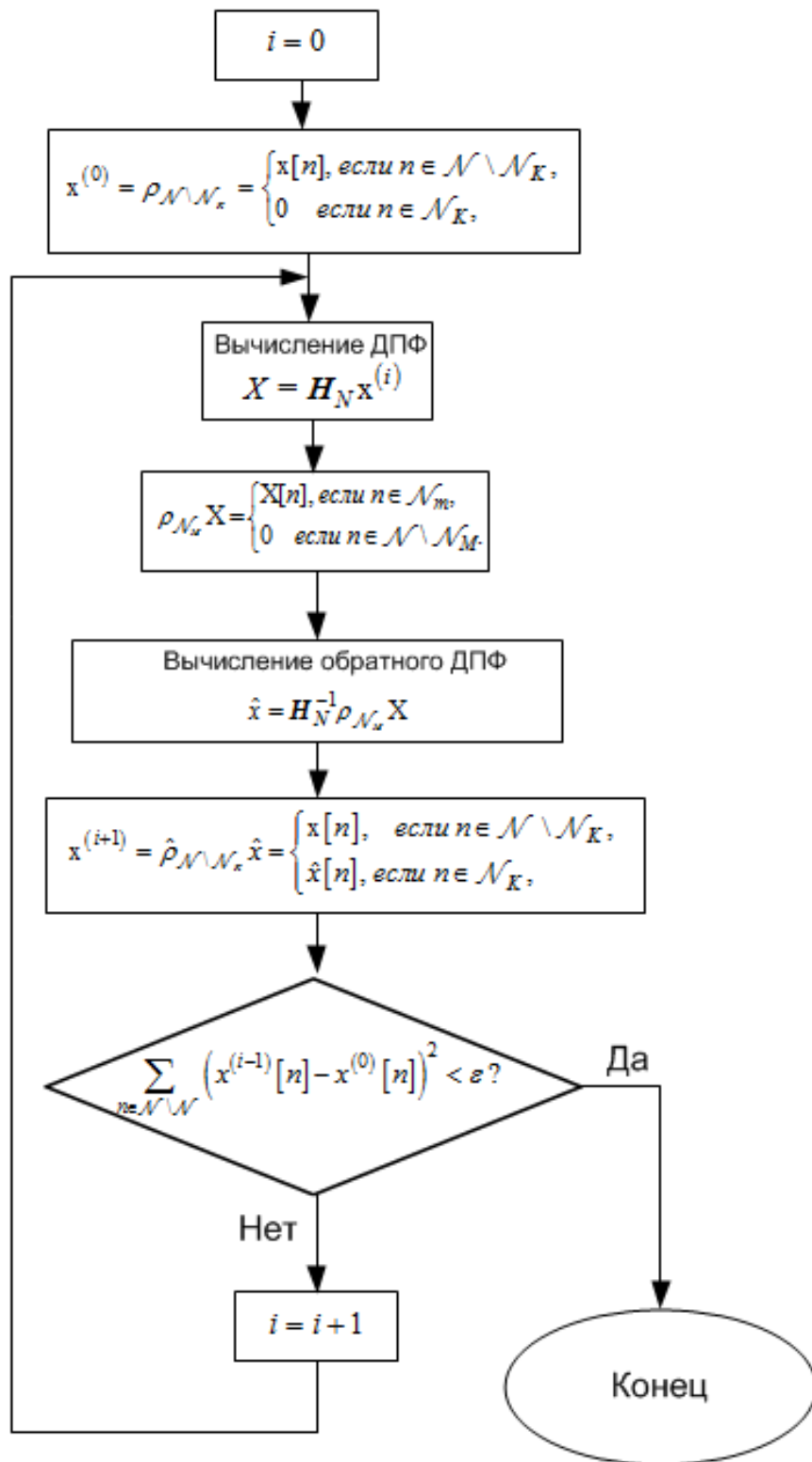


Рис. 1.43 Блок схема алгоритма Паполиса-Гершбера

5. Вычисление обратного ДПФ:

$$\hat{x} = H_N^{-1} \rho_{N_M} H_N x^{(i)}.$$

6. Формирование нового сигнала:

$$x^{(i+1)} = \hat{\rho}_{N \setminus N_K} \hat{x} = \begin{cases} x[n], & \text{если } n \in N \setminus N_K, \\ \hat{x}[n], & \text{если } n \in N_K. \end{cases}$$

7. Проверка выполнения условия:

$$\sum_{n \in N \setminus N_K} \left(x^{(i-1)}[n] - x^{(0)}[n] \right)^2 < \varepsilon,$$

где ε – заданная величина, имеющая смысл погрешности восстановления сигнала в точках, номера которых принадлежат множеству $N \setminus N_K$.

8. Если условие в п. 7 истинно, то вычисления завершаются.

9. Если условие в п. 7 ложно, то увеличение значения счетчика $i = i + 1$ и выполнение действий, описанных в пп. 3–7.

Отметим, что авторы наряду с классическим вариантом алгоритма Паполиса-Гершбера предложили следующие его модификации.

1. Использовать в п. 4 алгоритма Паполиса-Гершбера вместо полосового фильтра с полосой пропускания фильтра $[0, M]$ режекторный фильтр, у которого отличны от нуля коэффициенты пропускания на частотах, номера которых выбираются, например, из условия:

$$N_M(x) = \{m_i \in N, i = 0, \dots, M-1 : |X[m_0]| \geq \dots \geq |X[m_{M-1}]|\}.$$

Отметим, что данный способ восстановления сигнала был назван авторами нелинейной аппроксимацией (nonlinear approximation), с чем мы не можем согласиться, так как здесь фактически изменяется способ выбора отличных от нуля коэффициентов, но собственно способ восстановления значений сигнала – линейная комбинация соответствующих базисных функций, в которой коэффициенты есть выбранные коэффициенты ДПФ сигнала x – остается неизменным.

2. Использовать в п. 3, 5 алгоритма Паполиса-Гершбера вместо ДПФ дискретное вэйвлет-преобразование. Линейное приближение функции с использованием базиса Фурье.

Все возможные модификации алгоритма Паполиса-Гершбера, возникающие при использовании предложенных в [112] модификаций базового алгоритма представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Варианты алгоритма Популиса-Гершбера

Варианты алгоритма PG	Линейное приближение	Нелинейное приближение
Фурье-базис	$N_M = \{0, 1, \dots, M-1\}.$ $Z = H_{ДПФ}^{-1} \cdot \rho_{N_M} \cdot H_{ДПФ} \cdot x^{(i)},$ $H_{ДПФ}$ – матрица ДПФ.	$N_M(x) = \max\{S_{ДПФ}\},$ где $S_{ДПФ}$ – коэффициенты ДПФ. $Z = H_{ДПФ}^{-1} \cdot \rho_{N_M} \cdot H_{ДПФ} \cdot x^{(i)}$
Вейвлет-базис	$N_M = \{0, 1, \dots, M-1\}.$ $Z = H_{ДВП}^{-1} \cdot \rho_{N_M} \cdot H_{ДВП} \cdot x^{(i)},$ $H_{ДВП}$ – матрица ДВП.	$N_M(x) = \max\{S_{ДВП}\},$ где $S_{ДВП}$ – коэффициенты ДВП. $Z = H_{ДВП}^{-1} \cdot \rho_{N_M} \cdot H_{ДВП} \cdot x^{(i)}$

С нашей точки зрения вызывает сомнение правомерность отнесения рассмотренной задачи к задачам неравномерной дискретизации, так как здесь фактически вычисляются значения пропущенных отсчетов дискретного сигнала, заданного в узлах равномерной временной сетки. Необходимо отметить, что авторы оставили открытым вопрос о численном значении критерия ε данного алгоритма, по которому итерационный цикл должен завершиться. Кроме того в [112] приведены только численные оценки скорости сходимости данных итерационных алгоритмов, хотя с практической точки зрения для оценки качества работы вычислительных алгоритмов несомненный интерес представляют оценки точности восстановления дискретного сигнала. Также остался неисследованным вопрос о влиянии эффекта Гиббса, с неизбежностью возникающего во временной области из-за использования тех или иных полосовых фильтров.

Отметим, что описанный выше подход со всеми присущими ему недостатками был также использован P. Vandewalle, L. Sbaiz, J. Vandewalle и M. Vetterli [159,160] (2006 г.) для восстановления многоканальных сигналов с неизвестными положениями отсчетов на временной оси. Данная дискретизация аналогична рассмотренной в первом разделе рекуррентной дискретизации.

Методы решения задачи восстановления одномерных и двумерных дискретных сигналов, значения которых заданы в узлах временных или координатных сеток с неизвестными точно узловыми координатами, рассматривал J. Tian в [154]. Данная задача возникает при обработке интерферограмм в Фурье-видеоспектрометрах (imaging fourier-transform spectrometer, IFTS) [108]. Отметим, что описанные в [154] методы основаны на уточнении значений изначально неизвестных координат узлов сетки. Для

этого в соответствии с имеющейся априорной информацией ставится и решается соответствующая оптимизационная задача:

$$t_i = \arg \min (f_{apriori}(t_i) - f[i]), \quad (1.65)$$

например, в качестве функции $f[i]$ можно использовать спектр экспериментально зарегистрированного сигнала, вычисленный в предположении, что его отсчеты заданы в узлах равномерной временной сетки, а также известны аналитическая функция $f_{apriori}(t_i)$ и ее спектр. Для решения оптимизационной задачи (1.65) в [154] предложено использовать генетические алгоритмы.

J. Browning предложил алгоритм, близкий по смыслу к рассмотренным ранее алгоритмам [55]. Данный алгоритм предназначен для решения следующей задачи. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру ДС $x_i = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{N_d-1}\}$, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значения координат ее узлов. Известно, что число спектральных составляющих ДС равно L . Предполагается, что значение координаты узла временной сетки первого отсчёта известно и равно нулю $t_0 = 0$, а также известно значение координаты последнего отсчёта t_{N_d-1} . Требуется определить значения координат t_i , $i = \overline{1, N_d - 2}$, отчетов дискретного сигнала x_i . Определяемые данным методом значения координат отсчетов будем обозначать q_i .

Для решения данной задачи в [55] предложено минимизировать число спектральных составляющих, находящихся вне априорно известной полосы спектра сигнала $[1, L]$. Данный алгоритм реализуется выполнением следующей последовательности действий (далее оптимизационный алгоритм №1).

1. Выбор произвольным образом координаты узлов временной сетки $q_i^{(rand)}$, за исключением первого и последнего отсчёта, значения которых фиксированы. Общее число узлов временной сетки $q_i^{(rand)}$ равняется числу отсчётов N_d дискретного сигнала x_i , $i = \overline{0, N_d - 1}$.

2. Вычисление по таблице $\langle q_i^{(rand)}, x_i \rangle$ с помощью кубической сплайн-интерполяции в узлах равномерной временной сетки $t_m^{(uniform)}$, $m = \overline{1, N}$, значений дискретного сигнала u_m .

3. Вычисление ДПФ S_k сигнала u_m :

$$S_k = \sum_{i=0}^{N-1} u_i e^{-j \frac{2\pi}{N} ik}, \quad k = 0 \dots N-1. \quad (1.66)$$

4. Вычисление значений целевой функции

$$C = \sum_{k=F_{\max}}^{N-F_{\max}} |S_k|^2, \quad (1.67)$$

где N – число отсчетов равномерной временной сетки;

F_{\max} – номер максимальной гармоники спектра сигнала u_m .

5. Поиск минимума целевой функции (1.67), используя один из известных методов решения оптимизационных задач, например, методом градиентного спуска.

Данный алгоритм, по мнению его автора, может легко работать с сотнями или даже тысячами отсчетов данных, однако, соответствующих подтверждений этого он не приводит. Отметим также, что алгоритм J. Browning имеет систематическую ошибку, обусловленную использованием сплайн-интерполяции, которая, однако, в [55] не оценивалась.

Рассмотренный выше метод оценивания неизвестных координат неравномерной временной сетки, как утверждает J. Browning, был его первым шагом в попытке решить задачу определения неизвестных значений координат неравномерно дискретизированного сигнала. В дальнейших исследованиях он предложил новый алгоритм, который является модифицированной версией оптимизационного алгоритма № 1. Здесь в отличие от прототипа сплайн-интерполяция для вычисления значений сигнала на равномерной временной сетке не используется. В данном случае вычисляется формальное ДПФ непосредственно по неравномерно отстоящим отсчётам (далее оптимизационный алгоритм № 2).

Оптимизационный алгоритм № 2 предложен для решения такой же задачи, как в оптимизационном алгоритме № 1, однако максимальная частота спектра сигнала здесь считается равной L/τ , где L – целое число. Предполагается, что сигнал

$\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, может быть аппроксимирован конечным рядом Фурье, содержащим $2L+1$ комплексных экспонент

$$g(t_i) = \sum_{k=-L}^L \alpha_k \exp\left(\frac{2\pi j}{\tau} k t_i\right), \quad i=1, \dots, N-2. \quad (1.68)$$

Требуется определить местоположения отсчётов $\{t_i\}$ и значения коэффициентов $\{\alpha_k\}$, при которых $\{g_i\} = \{x_i\}$:

$$\begin{bmatrix} z_1^{-L} & \cdots & z_1^0 & \cdots & z_1^L \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{N-2}^{-L} & \cdots & z_{N-2}^0 & \cdots & z_{N-2}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-L} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (1.69)$$

где $z_i = \exp\left(\frac{2\pi j}{\tau} k t_i\right)$.

В матричной форме (1.69) можно записать как $M \cdot a = x$.

Наилучшее приближение ДС с помощью (1.68) есть решение следующей экстремальной задачи:

$$\langle \alpha, \{t_i\} \rangle = \arg \min_{M, a} \|x - M \cdot a\|^2, \quad (1.70)$$

где $\|\cdot\|$ является нормой пространства l_2 ; x – вектор значений дискретного сигнала с неизвестными координатами отсчетов; M – матрица, содержащая экспоненты ряда Фурье; a – вектор, содержащий коэффициенты α_k .

Для решения (1.70) в [56] применялся итерационный метод чередующихся наименьших квадратов [63], суть которого состоит в следующем. Сначала линейными регрессионными методами определяются оценки линейных параметров, при фиксированных значениях нелинейных параметров, и далее оценке нелинейных параметров в соответствии с процедурой наискорейшего спуска при найденных ранее фиксированных оценках линейных параметров. Данная процедура повторяется до достижения сходимости алгоритма.

Аналогичный описанному выше подход был использован А. Nordio, С.Ф. Chiasserini и Е. Viterbo в [121,122,120] для решения задачи восстановления ограниченных по спектру сигналов, заданных на НВС с неизвестными

местоположениями отсчетов. (Применительно к беспроводным распределенным измерительным системам неопределенность местоположения отсчетов обусловлена погрешностью определения положения датчиков.) При этом они предложили рассматривать задачу (1.70), как задачу идентификации параметров фильтров выбранного типа, обеспечивающих в том, или ином смысле близость значений входного (сигнала с неравномерной частотой дискретизации) и выходного сигналов. Однако с вычислительной точки зрения данная задача оказывается не менее сложной, чем задача (1.70).

Еще один алгоритм решения задачи (1.70) предложили Y. M. Lu и M. Vetterli в [102]. Суть данного алгоритма состоит в следующем. При незнании значений и местоположений $\hat{\tau}$ отсчетов задача (1.70) оказывается нелинейной. Однако ее можно существенно упростить, если использовать матрицу ДПФ исходного сигнала D_{τ} . Тогда задача оценки местоположений $\hat{\tau}$ отсчетов записывается в виде:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\tau} \sigma_K(D_{\tau}), \quad (1.71)$$

где $\hat{\tau}$ – неизвестные координаты отсчетов, $\sigma_K()$ – K -ые сингулярные числа матрицы D_{τ} , D_{τ} – $K \times N$ матрица, K – число каналов, N – число гармоник спектра.

$$D_{\tau} = [\Lambda_{\tau}^*(\omega_1)Y(\omega_1), \Lambda_{\tau}^*(\omega_2)Y(\omega_2), \dots, \Lambda_{\tau}^*(\omega_N)Y(\omega_N)],$$

где $\Lambda_{\tau}^*(\omega) = \text{diag}\{e^{j\omega\tau_k}\}$, $Y(\omega) = [Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_K(\omega)]^T$ – вектор, содержащий преобразования Фурье сигналов в каждом из K каналов.

Как утверждают авторы, предложенный метод имеет низкую вычислительную сложность. Однако при ее оценке авторы, по-видимому, не учли вычислительные затраты связанные с нахождением сингулярного разложения матрицы D_{τ} .

L. Sbaiz, P. Vandewalle и M. Vetterli в [138] предложили использовать для восстановления рассматриваемых дискретных сигналов, получаемых при многоканальной дискретизации, вместо комплексных экспонент (см. (1.68)), базис Грёбнера [1], вычисляемый в соответствии с алгоритмом Бухбергера [1], а также предложили соответствующие алгоритмы и продемонстрировали их работоспособность на примере ДС, состоящих из нескольких отсчетов. В то же время известно [164], что основная проблема, с которой достаточно тяжело справиться, состоит во взрывном росте в процессе вычислений целочисленных коэффициентов полиномов, образующих

базис Грёбнера. Это приводит к очень большим затратам, как по процессорному времени, так и по памяти при вычислении базисов для реальных сигналов. В этой связи возможны два пути решения данной проблемы: улучшать алгоритм построения базисов или создавать параллельные версии известных алгоритмов. Однако здесь существенных результатов, позволяющих использовать данный метод для восстановления реальных сигналов, пока не получено.

С. Р. Li и др. [61] предложили использовать алгоритм восстановления сигналов основанный на линейном каноническом преобразовании (Linear Canonical Transform (LCT)) [152]. Его выбор обусловлен тем, что существующие подходы [55,113] восстановления дискретных сигналов с неизвестными координатами узлов временной сетки основаны на предположении об ограниченности их спектра. Однако на практике существует много сигналов неограниченных в пространстве Фурье, но ограниченных в области линейного канонического преобразования.

Напомним, что линейное каноническое преобразование было введенное в 1970-ых годах [117] является обобщением многих хорошо известных преобразований, таких как преобразования Фурье, Лапласа, Френеля и т.д. Линейное каноническое

преобразование с параметрами $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ сигнала $x(t)$ определяется как

$$L_A(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{(j/2)[(a/b)t^2 - (2/b)ut + (d/b)u^2]} dt, & b \neq 0, \\ \sqrt{d} e^{(j/2)cdu^2} f(du), & b = 0, \end{cases} \quad (1.72)$$

где a, b, c, d – вещественные числа удовлетворяющие условию $ad - bc = 1$, т.е. $\det(A) = 1$.

В частности, при $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ получаем преобразования Фурье, при

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}$ – преобразование Лапласа.

Обратное линейное каноническое преобразование (ILCT) определяется заменой матрицы A на $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Для конечного сигнала $x(t)$ его ряд линейного канонического преобразования

(Linear Canonical Transform Series, LCTS) с параметрами $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определяется как

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{A,n} \sqrt{\frac{j}{T}} e^{(j/2)[-(d/b)(n2\pi b/T)^2 + (2/b)t(n2\pi b/T) - (a/b)t^2]}, \quad (1.73)$$

где коэффициенты LCTS $C_{A,n}$ равны

$$C_{A,n} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sqrt{\frac{-j}{T}} e^{-(j/2)[-(d/b)(n2\pi b/T)^2 + (2/b)t(n2\pi b/T) - (a/b)t^2]} dt, \quad (1.74)$$

где $t \in [-T/2, T/2]$ и T – длительность сигнала.

Конечный ряд линейного канонического преобразования, содержащий $2L+1$ комплекснозначных экспонент, определяется как

$$x_L(t) = \sum_{n=-L}^L C_{A,n} Q(n) e^{j(2\pi n/T)t} e^{-j(a/2b)t^2}, \quad (1.75)$$

где $Q(n) = \sqrt{j/T} e^{-j(2\pi^2 bd/T^2)n^2}$.

Предположим, что имеется сигнал $x(t)$, ограниченный в области ЛСТ, отсчеты которого равны $\{x_i\}$. Задача заключается в нахождении неизвестных координат отсчетов $\{t_i\}$, коэффициентов $\{C_{A,n}\}$, также в аппроксимации ДС $\{x_i\}$ конечным рядом, представляющим собой линейную комбинацию базисных функций канонического преобразования:

$$x_i = x_L(t_i) = \sum_{n=-L}^L C_{A,n} Q(n) e^{j(2\pi n/T)t_i} e^{-j(a/2b)t_i^2}, \quad (i=1, 2, \dots, N-2). \quad (1.76)$$

В матричной форме (1.76) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{-L} & \dots & z_1^0 & \dots & z_1^L \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{N-2}^{-L} & \dots & z_{N-2}^0 & \dots & z_{N-2}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{A,-L}Q(-L) \\ \vdots \\ C_{A,0}Q(0) \\ \vdots \\ C_{A,L}Q(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \end{pmatrix}, \quad (1.77)$$

где $e_i = e^{-j(a/2b)t_i^2}$, $z_i = e^{2\pi jt_i/T}$.

Из (1.77) видно, что задача нахождения неизвестных координат отсчетов $\{t_i\}$, коэффициентов $\{C_{A,n}\}$ и аппроксимации сигнала от отсчетов $\{x_i\}$ через конечный ряд линейного канонического преобразования, как и ранее, сводится к решению оптимизационной задачи нахождения значений параметров, обеспечивающих минимум квадрата разности между отсчетами и моделью

$$\min_{\{t_i\}, \{C_{A,n}\}} \|f - EMC\|^2, \quad (1.78)$$

где EMC – матрица, стоящая в правой части (1.77), $\|\cdot\|$ – l_2 норма.

Завершая обзор методов восстановления дискретных сигналов, заданными значениями в узлах с неизвестными координатами, отметим следующие теоретические работы. В [93] А. Kumar (2013 г.) показывает, что однозначное восстановление ограниченных по спектру сигналов, заданных в узлах неравномерной временной сетки с известным законом распределения джиттера, но с неизвестными координатами, невозможно, даже если число отсчетов бесконечно. Для однозначного решения рассматриваемой задачи необходима упорядоченность данных отсчетов во времени.

В [42] А. Aldroubi приводит теоретические доказательства существования условий, при которых функция однозначно и полностью восстанавливается в пространстве инвариантном относительно сдвига по последовательности отсчетов, заданных в моменты времени $t_j + \delta_j$, если джиттер δ_j неизвестен, а также доказывает соответствующие теоремы, позволяющие теоретически оценивать качество восстановления ДС.

Таким образом, большинство известных алгоритмов восстановления неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки сводятся к решению многопараметрической оптимизационной задачи и ориентированы на нахождение одновременно всех неизвестных координат отсчетов сигнала. Однако рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска параметров ни в одной из изученных работ не приводится, но без таковых гарантировать нахождение глобального, но не локального минимума оптимизируемой функции оказывается достаточно проблематичным. Нахождение решения многопараметрической оптимизационной задачи также требует больших

вычислительных затрат. В этой ситуации несомненный практический интерес представляют более простые с вычислительной точки зрения «квазиоптимальные» методы аппроксимации данных сигналов, учитывающие их локальные особенности.

1.4 Методы локальной аппроксимации эмпирических зависимостей

Катковник предложил использовать методы локальной аппроксимации эмпирических зависимостей в задаче восстановления функциональной зависимости при наличии ошибок в независимых переменных по активной схеме регрессионного анализа [16]. В его работе решаемая задача имела следующую формулировку. Пусть величины x_i и t_i связаны между собой соотношением $x_i = \eta(t_i, \theta)$, $x_i \in R^1$, $\eta(t, \theta)$ – заданная функция аргументов (предикторов) $t \in R^k$, $\theta \in R^m$. Здесь θ – неизвестные параметры, оценки которых могут быть получены по результатам наблюдений проводимых по схемам активного либо пассивного экспериментов.

Предположим, что исследователь, задавая значения переменной t_i , измеряет значения переменной x_i . Здесь наибольший интерес представляет случай, когда значения t_i не могут быть заданы абсолютно точно, а значения величин x_i измеряются с некоторой погрешностью. Тогда данные, получаемые в эксперименте, описываются следующей стохастической моделью:

$$y_i = x_i + \varepsilon_i, \quad t_i = g_i + h_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.79)$$

где y_i – результат i -го наблюдения над x_i ; ε_i – погрешность данного наблюдения (случайная величина), такая что $E[\varepsilon_i] = 0$, (E – оператор математического ожидания); g_i – условия (режимы), при которых экспериментатор стремился провести i -е измерение, а t_i – их действительные значения; h_i – случайные погрешности в фиксации режимов, $E[h_i] = 0$.

Объединяя выражения (1.79), получаем следующую модель:

$$y_i = \eta(g_i + h_i) + \varepsilon_i, \quad (1.80)$$

где y_i , g_i известны экспериментатору, причем g_i – управляемая переменная.

В том случае, когда явное выражение функции $\eta(t, \theta)$ неизвестно (типичная ситуация, возникающая при анализе сигналов, регистрируемых информационно-измерительными системами) Катковник предложил использовать аппроксимацию анализируемых экспериментальных данных на локальных отрезках с помощью линейных комбинаций известных базисных функций – локальную аппроксимацию.

Методы решения задач регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора, найденные при целом ряде ограничений, проверить выполнение которых на практике оказывается невозможным, описаны в [8,37,16,14]. Их анализ показывает, что основное внимание авторов было направлено на получение вычислительных алгоритмов, позволяющих получать оценки параметров стохастических моделей, а не собственно алгоритмов вычисления истинных значений наблюдений, вычисляемых по данным моделям, их точности. Это не позволяет напрямую использовать данные методы в задаче восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки, однако, соответствующие подходы, особенно локальная аппроксимация, представляются достаточно конструктивными. Однако метод оценки функции $E[y_i]$, приводимый Катковником в [16], требует знания математического ожидания и дисперсии случайных величин n_i и ξ_i , которые на практике априорно неизвестны, а также вычисления производной функции $\eta(g, \theta)$, выбор явного вида которой оказывается неоднозначным.

Отметим, что джиттер можно рассматривать как появление дополнительной случайной составляющей, что дает нам право использовать традиционный метод локальной аппроксимации. Действительно, в результате неопределенности точных местоположений отсчетов, отнесение значений сигнала x_i к узлам равномерной временной сетки, означает восстановление сигнала по таблице (iT, x_i) . В данном случае $x_i = \tilde{x}_i + \Delta_i$, где \tilde{x}_i – истинные значения сигнала в узлах равномерной сетки iT , Δ_i – составляющая ДС, обусловленная незнанием точных значений координат узлов временной сетки t_i :

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.81)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина, с $\tau_i \in]-\Delta/2, \Delta/2[$, где $\Delta < T$ – размах джиттера.

Типичная зависимость Δ_i от номера отсчета, получаемая при дискретизации гармонического сигнала с безразмерным значением частоты $\hat{f} = 0.2$ в узлах временной сетки (1.81), где $M_0 = 1000$, τ_i – числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения (ЗР) на интервале $(-0.05, 0.05)$, представлена на рис. 1.44. Гистограмма данной последовательности и ее автокорреляционная функция представлены на рис. 1.45, соответственно.

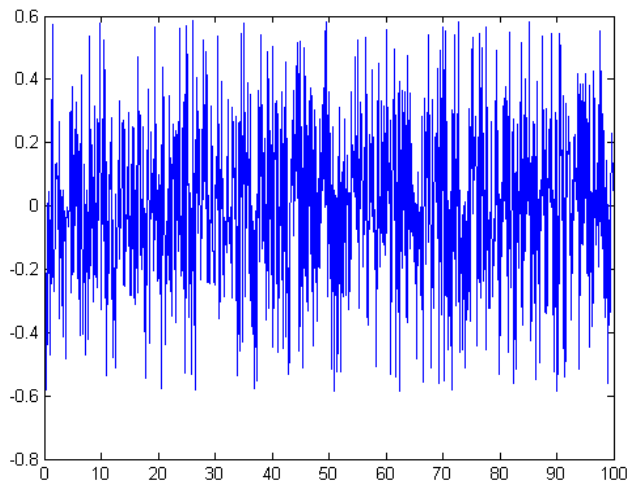


Рис. 1.44 – Составляющая ДС, обусловленная незнанием точных значений координат узлов временной сетки (1.81), равномерный ЗР τ_i

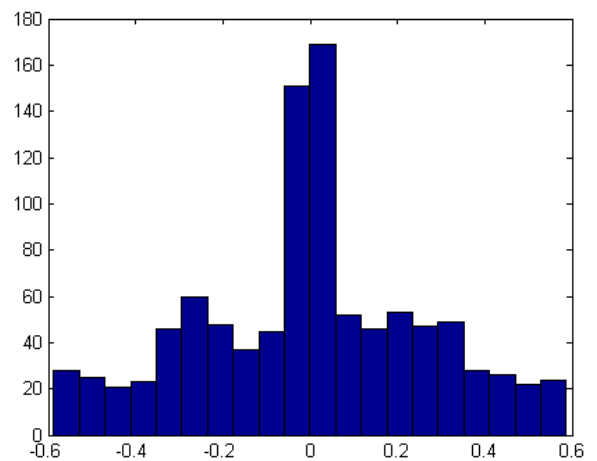


Рис. 1.45 – Гистограмма последовательности Δ_i , представленной на рис.1.44

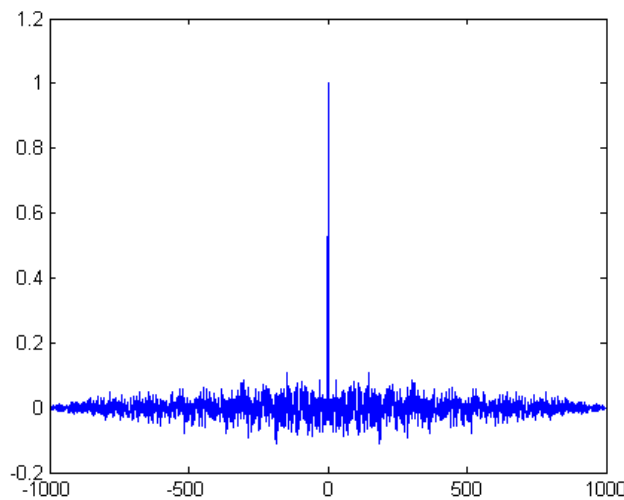


Рис. 1.46 – Автокорреляционная функция последовательности Δ_i , представленной на рис. 1.44

Типичная зависимость Δ_i от номера отсчета, получаемая при дискретизации гармонического сигнала с безразмерным значением частоты $\hat{f} = 0.2$ в узлах временной

сетки (1.81), где $M_0 = 1000$, τ_i – числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с нормальным законом распределения $N\left(0, \frac{0.1}{3\sqrt{12}}\right)$, представлена на рис. 1.47. Гистограмма данной последовательности и ее автокорреляционная функция представлены на рис. 1.48, 1.49 соответственно.

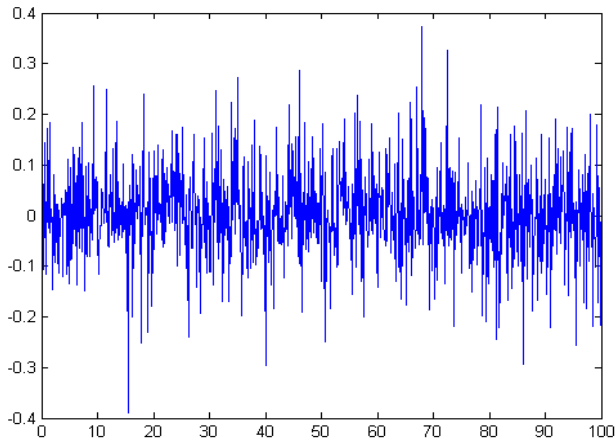


Рис.1.47 – Составляющая ДС, обусловленная незнанием точных значений координат узлов временной сетки (1.81), нормальный ЗР τ_i

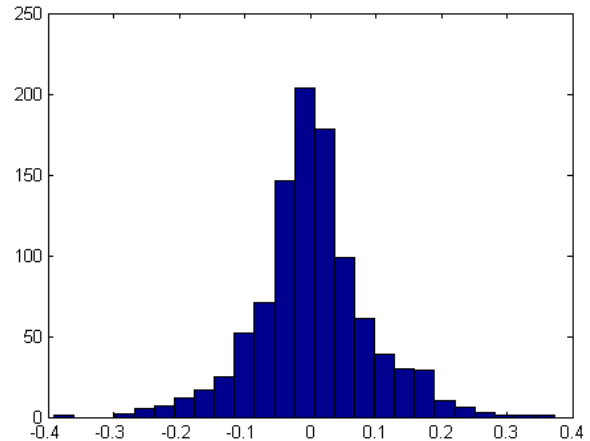


Рис.1.48 – Гистограмма последовательности Δ_i , представленной на рис 1.47.

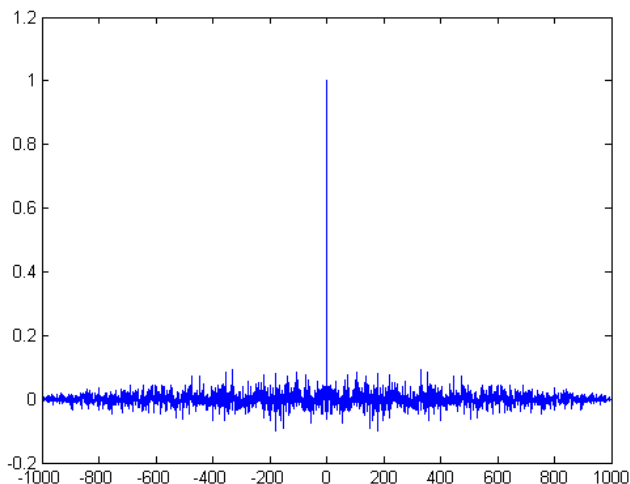


Рис.1.49 – Автокорреляционная функция последовательности Δ_i , представленной на рис.1.47.

Из рис. 1.44–1.49 видно, что последовательность Δ_i вне зависимости от вида функции распределения величины τ_i в (1.81) являются некоррелированными случайными последовательностями. При этом функции распределения случайных величин Δ_i оказываются отличными от функции распределения случайных величин τ_i . Данный результат можно понять, рассмотрев случай $\tau_i \ll T$, для которого, как очевидно,

$$\Delta_i \approx x'(iT)\tau_i, \quad (1.82)$$

т. е. в первом приближении Δ_i есть результат умножения значения производной дискретизируемого сигнала $x(t)$ в точке iT на случайную величину τ_i .

Таким образом, результаты сравнения задачи регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора и восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки, позволяют сделать вывод о том, что данные задачи сходны по своей постановке. Следовательно, существует потенциальная возможность использования подходов к решению задачи регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора в задаче восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки, для подтверждения которой необходимо проведение целенаправленных исследований.

1.5 Постановка задач исследования

Анализ состояния предметной области показал, что существуют две отличные друг от друга постановки задачи восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации.

Задача 1. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру дискретного сигнала $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_K\}$, заданного на неравномерной временной сетке, с соответствующими значениями координат $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_K\}$. Необходимо по данным наборам произвести восстановление дискретного сигнала.

Задача 2. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру дискретного сигнала $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_K\}$, заданного на неравномерной временной сетке. Соответствующие значения координат отсчетов $t_k \in \{t_0, t_1, \dots, t_K\}$ точно неизвестны. Необходимо определить неизвестные значения координат отсчетов данного дискретного сигнала и произвести восстановление.

Первая задача по своей постановке может быть отнесена к классической задаче интерполяции функции, заданной таблично, методы решения которой известны [18,22].

Вторая задача – восстановление непрерывного сигнала по значениям ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно координатами ее узлов, менее исследована, однако, с практической точки зрения представляет несомненный интерес. Анализ подходов используемых для ее решения,

показал, что они направлены на определение неизвестных значений координат узлов временной сетки, являющихся решением той или иной оптимизационной задачи. После нахождения координат узлов задача восстановления непрерывного сигнала по отсчетам ДС решается методами, используемыми для решения задачи № 1.

В связи с тем, что вычислительные алгоритмы, используемые при решении оптимизационной задачи, имеют большую вычислительную сложность, а их сходимость к глобальному минимуму критически зависит от удачного выбора начальных параметров, разработка алгоритмов решения задачи № 2, свободных от указанных недостатков, оказывается актуальной. Также необходимо отметить, что в научной литературе не удалось обнаружить оценок собственно точности восстановления непрерывного сигнала, достигаемой при использовании данных алгоритмов.

Проведено сравнение постановок задачи № 2 и задачи восстановления функциональной зависимости при наличии ошибок в независимых переменных по активной схеме регрессионного анализа, для решения которой используется локальная аппроксимация эмпирических зависимостей, результаты которого позволяют сделать обоснованный вывод об их сходстве. Выявленное сходство постановок рассматриваемых задач позволяет предположить, что при разработке алгоритмов восстановления ДС, заданных в узлах временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, целесообразно использовать подходы, основанные на локальной аппроксимации ДС.

Цель работы: разработка и исследование алгоритмов восстановления ДС, заданных в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов.

Для достижения поставленной цели в работе были решены следующие задачи:

1. Исследование особенностей восстановления ДС, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов, с помощью интерполяционных методов.

2. Исследование особенностей восстановления ДС, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов, с помощью оптимизационных методов нахождения координат узлов временной сетки.

3. Разработка алгоритмов восстановления ДС, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, не требующих решения сложных с вычислительной точки зрения оптимизационных задач.

4. Применение разработанных алгоритмов восстановления ДС, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, для восстановления ДС, регистрируемых на выходе высокоскоростных АЦП.

Глава 2 Исследование особенностей восстановления дискретных сигналов, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов и методов оценивания координат узлов

2.1 Методика исследования особенностей восстановления дискретных сигналов, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов и методов оценивания координат узлов

В данной главе приведены численные результаты исследования рассмотренных ранее методов восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов. В связи с невозможностью получения аналитических оценок точности восстановления данного типа ДС был выбран подход, основанный на использовании модельных сигналов. В соответствии с выбранным подходом, генерировалась временная сетка

$$t_i = iT + \tau_i, \quad t_i > t_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

где N – число отсчетов исходного ДС, $\tau_i \in]-T/2, T/2[$ – случайная величина с заданным законом распределения, точные значения которой принимались неизвестными, T – период дискретизации. Далее в узлах ВС (2.1) вычислялось множество значений ДС

$$x_i = f(t_i).$$

Затем по таблице значений $[t_i, x_i]$ в узлах ВС

$$\eta_{m_1} = m_1 T_1, \quad m_1 = \overline{1, M_1}, \quad (2.2)$$

где $t_1 \leq \eta_1 \leq t_2$; T_1 – период дискретизации ($T_1 < T$); M_1 – число узлов временной сетки η_{m_1} , с помощью одного из исследуемых методов восстановления ДС, заданного в узлах ВС (2.1), вычислялись значения восстановленного сигнала.

Для оценки точности восстановления исходного сигнала использовалось отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления (Signal-to-Error Ratio – SER):

$$SER = 10 \log \frac{\sum_{m_1=1}^{M_1} s_{m_1}^2}{\sum_{m_1=1}^{M_1} (s_{m_1} - u_{m_1})^2}, \quad (2.3)$$

где $s_{m_1} = f(\eta_{m_1})$ – значения исходного сигнала, вычисленные в узлах равномерной сетки (2.2); u_{m_1} – восстановленный сигнал в узлах равномерной сетки (2.2). Данный параметр используется многими исследователями для оценки точности восстановления ДС, например, в работах [131,118,109,171,52,124,151].

Принимая во внимание, что τ_i в (2.1) является случайной величиной, для повышения достоверности оценок точности восстановления сигналов был использован метод Монте-Карло.

Блок-схема алгоритма оценки точности восстановления ДС, заданного в узлах временной сетки с неизвестными значениями координат узлов представлена на рис. 2.1. Из рисунка видно, что данный алгоритм реализуется следующей последовательностью действий, которые можно сгруппировать в следующие блоки.

Блок 1 – вычисление точных значений сигнала в узлах временной сетки (2.2): $s_{m_1} = f(m_1 T_1)$. Данные значения используются далее для вычисления погрешности восстановления ДС.

Блок 2 – инициализация счетчика цикла шагов метода Монте-Карло: $j = \overline{1, N}$, где N – число статистических испытаний.

Блок 3 – Генерирование неравномерной временной сетки (2.1) и вычисление в ее узлах значений ДС x_i .

Блок 4 – Вычисление с помощью того или иного метода восстановления ДС значений восстановленного сигнала u_{j,m_1} по таблице $[g_i, x_i]$, где $g_i = iT$, $i = \overline{1, N}$, в случае исследования интерполяционных методов; $g_i = \hat{t}_i$, в случае исследования оптимизационных методов оценивания местоположений отсчетов, где \hat{t}_i – вычисленные в соответствии с исследуемым методом значения координат узлов.

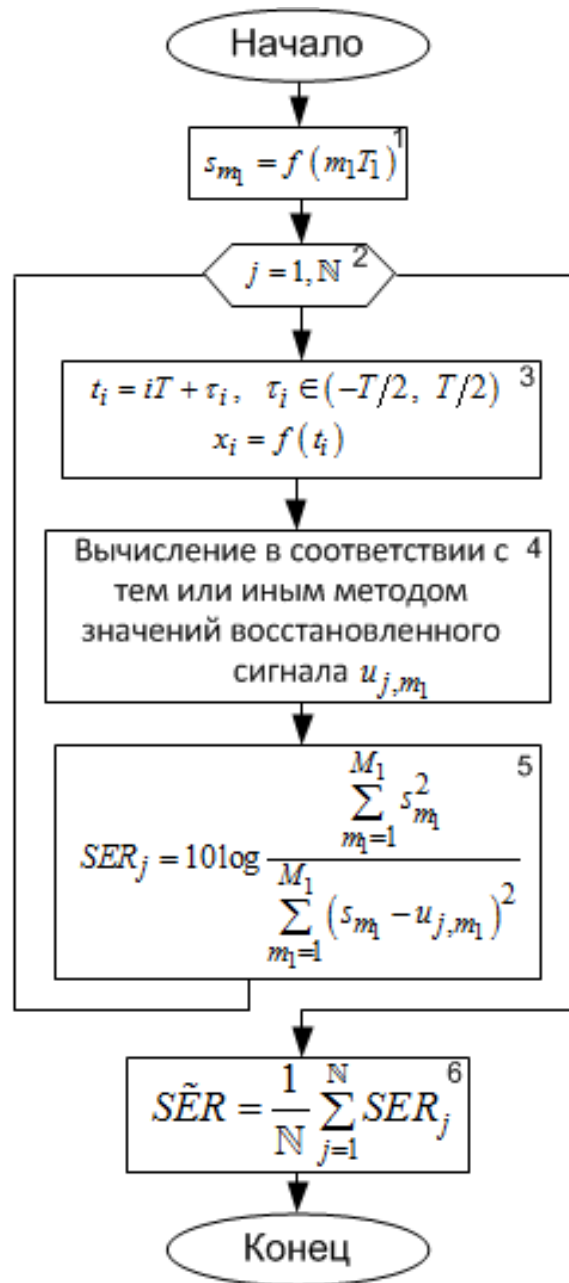


Рис. 2.1 Блок-схема алгоритма оценки точности восстановления ДС

Блок 5 – вычисление в соответствии с (2.3) погрешности восстановления сигнала на j -ом шаге метода Монте-Карло SER_j .

Блок 6 – вычисление усредненной по ансамблю реализаций погрешности восстановления ДС, заданного в узлах временной сетки (2.2):

$$\widetilde{SER} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N SER_j.$$

Для исследования особенностей восстановления ДС в рамках Задачи №2 были использован набор типовых модельных функций, выбор которых обусловлен тем, что на практике данные функции используются для описания временных рядов, представляющих собой измеренные значения характеристик тех или иных систем, изучаемых, в том числе, в радиотехнике, метеорологии, экономике, экологии, медицине и других отраслях наук.

1) сигнал №1 (линейный тренд)

$$x_1(t) = 0.1 \cdot t, \quad (2.4)$$

2) сигнал №2 (полиномиальный тренд)

$$x_2(t) = 3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + t + 0.5, \quad (2.5)$$

3) сигнал №3 (периодический сигнал)

$$x_3(t) = 2 \sin(2\pi 0.5 f_c t) + 1.2 \cos(2\pi f_c t), \quad (2.6)$$

или выражая через безразмерную частоту

$$x_3(t_i) = 2 \sin\left(\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 1.2 \cos\left(2\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right), \quad (2.7)$$

где $\hat{f} = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta \hat{f}_i \in (-0.5 \hat{f}; 0.5 \hat{f})$.

4) сигнал №4 (с линейной частотной модуляцией, ЛЧМ-сигнал)

$$x_4(t) = \cos(2\pi(f_{\min} \cdot t + \frac{b}{2} t^2)), \quad (2.8)$$

где f_{\min} – минимальное значение частоты сигнала, f_{\max} – максимальное значение частоты сигнала, T_C – длительность сигнала, $b = (f_{\max} - f_{\min}) / T_C$.

Выражая (2.8) через безразмерную частоту дискретизации, получаем

$$x_4(t_i) = \cos\left(2\pi \left(\hat{f}_{\min} \cdot \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right) + \frac{\hat{f}_{\max} - \hat{f}_{\min}}{2} \frac{T}{T_C} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)^2 \right)\right), \quad (2.9)$$

где $\hat{f}_{\min} = f_{\min} T$, $\hat{f}_{\max} = f_{\max} T$.

5) сигнал №5 (амплитудно-модулированный сигнал, АМ-сигнал)

$$x_5(t) = \cos(f_{\text{нес}} \cdot t) [1 + M \cos(f_c \cdot t)], \quad (2.10)$$

где f_c – частота информационного сигнала; $f_{\text{нес}}$ – частота несущей; M – коэффициент модуляции.

Выражая (2.10) через безразмерную частоту дискретизации, получаем

$$x_5(t_i) = \cos(f_{\text{нес}} \cdot (iT + \tau_i)) \left[1 + M \cos(\hat{f}_c \cdot (i + \frac{\tau_i}{T})) \right], \quad (2.11)$$

где $\hat{f}_c = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; $\hat{f}_{\text{нес}} = f_c / f_{\text{нес}}$ поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta f_i \in (-0.5\hat{f}; 0.5\hat{f})$.

6) сигнал №6 (сигнал со скачкообразным изменением частоты, СИЧ-сигнал)

$$x_6(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_1 \cdot t), & 0 \leq t \leq T_C / 2, \\ \sin(2\pi f_2 \cdot t), & T_C / 2 < t \leq T_C, \end{cases} \quad (2.12)$$

где f_1, f_2 – частоты сигнала; T_C – длительность сигнала.

Выражая (2.12) через безразмерную частоту дискретизации, получаем

$$x_6(t_i) = \begin{cases} \sin(2\pi \hat{f}_1 \cdot (i + \frac{\tau_i}{T})), & 0 \leq t \leq T_C / 2, \\ \sin(2\pi \hat{f}_2 \cdot (i + \frac{\tau_i}{T})), & T_C / 2 < t \leq T_C, \end{cases}, \quad (2.13)$$

где $\hat{f}_1 = f_1 \cdot T$, $\hat{f}_2 = f_2 \cdot T$.

Для линейного и полиномиальных трендов в проведенных вычислительных экспериментах в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $(-0.025, 0.025)$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{0.05}{3\sqrt{12}}\right)$. Число отсчетов исходного сигнала – 1000, число шагов метода Монте-Карло равнялось 100, $M = 1980$.

Для сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнал), периодического сигнала, амплитудно модулированного сигнала (АМ-сигнал), и сигнала со скачкообразным изменением частоты (СИЧ-сигнал) в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $(-0.025, 0.025)$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{0.05}{3\sqrt{12}}\right)$, число шагов метода Монте-Карло равнялось 100, $M = 180$. Число отсчетов исходного сигнала – 100. Для периодического сигнала безразмерная частота дискретизации составляла $\hat{f} = 0.1$; для ЛЧМ-сигнала максимальное и минимальное значение безразмерной частоты дискретизации сигнала соответственно равнялось $\hat{f}_{\min} = 0.05$, $\hat{f}_{\max} = 0.1$, длительность сигнала T_C выбиралась из условия $T/T_C = 0.01$; для АМ-сигнала безразмерная частота информационного сигнала и безразмерная частота несущей составляли $\hat{f}_c = 0.1$, $\hat{f}_{\text{нес}} = 0.1$; для СИЧ-сигнала значения безразмерных частот дискретизации сигнала составляли $\hat{f}_1 = 0.05$, $\hat{f}_2 = 0.1$, длительность сигнала T_C выбиралась из условия $T/T_C = 0.01$.

2.2 Исследование особенностей восстановления линейного тренда, дискретизированного в узлах неравномерной временной сетки с джиттером, с помощью интерполяционных методов

В Главе 1 было отмечено, что если, формально, отнести значение дискретного сигнала x_i , измеренное для некоторого значения интервальной переменной $[t_i]$, к середине соответствующего временного интервала, то задача восстановления данного сигнала по своей постановке сводится к Задаче 2. Следовательно, для ее решения можно, потенциально, использовать рассмотренные методы решения Задачи 1, которые, однако, будут в рассматриваемом случае иметь некоторую систематическую погрешность, зависящую от неопределенности измерения временной координаты Δ .

Например, для случая восстановления линейного тренда, значения которого заданы в узлах временной сетки без джиттера, вычисляются по формуле:

$$\tilde{x} = \tilde{a}iT + \tilde{b}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

где $\tilde{a} = (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)/T$;

$$\tilde{b} = \tilde{x}_{i+1} - [(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)/T](i+1)T = \tilde{x}_i(i+1) - i\tilde{x}_{i+1}.$$

Для случая временной сетки с джиттером интерполированное значение в точке iT определяются параметрами прямой, построенной по точкам с координатами $[iT, x_i]$, где $x_i = \tilde{a}(iT + \tau_i) + \tilde{b}$, и $[(i+1)T, x_{i+1}]$, где $x_{i+1} = \tilde{a}[(i+1)T + \tau_{i+1}] + \tilde{b}$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= [\tilde{a} + \tilde{a}(\tau_{i+1} - \tau_i)/T]iT + \tilde{b} + \tilde{a}(i+1)\tau_i - \tilde{a}i\tau_{i+1} = \\ &= \tilde{a}iT + \tilde{b} + \tilde{a}(\tau_{i+1} - \tau_i)i + \tilde{a}(i+1)\tau_i - \tilde{a}i\tau_{i+1} = \tilde{x}_i + \tilde{a}\tau_i. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.15) видно, что интерполированные значения сигнала есть сумма истинного значения \tilde{x}_i и погрешности $\tilde{a}_i\tau_i$. Данную проблему иллюстрируют рис. 2.2, 2.3, на которых приведены результаты восстановления линейного тренда по значениям ДС, заданным узлах дискретной временной сетки (2.1), $N=10$. Здесь множество значений τ_i – выборка из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале $(-0.3, 0.3)$, сгенерированных в соответствии с равномерным законом распределения, объем выборки – 10. Восстановление линейного тренда осуществлялось по таблице значений $[i, x_i]$ с помощью линейной интерполяции.

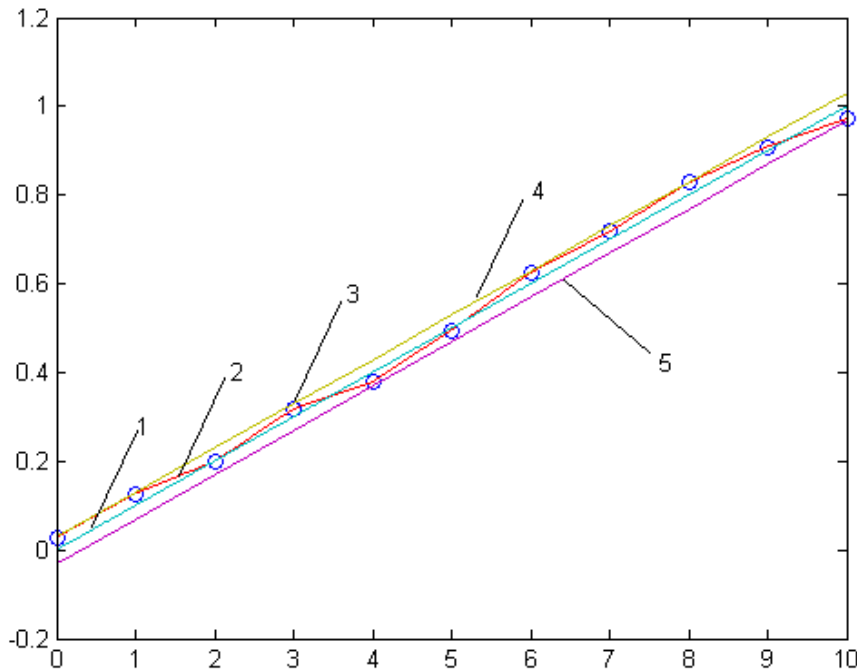


Рис. 2.2 Результаты восстановления линейного тренда: 1 – исходный сигнал; 2 – сигнал, восстановленный линейной интерполяцией; 3 – узлы интерполяции; 4 – верхняя граница функции $x_- = x([t_i])$; 5 – нижняя граница функции $x_+ = x([t_i])$

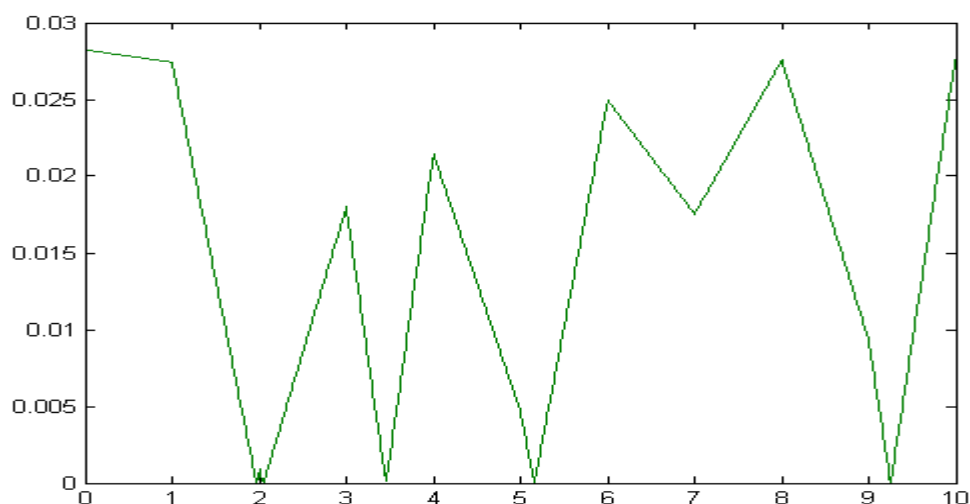


Рис. 2.3 Погрешность восстановления линейного тренда

Из рис. 2.2, 2.3 видно, что следствием незнания точных значений координат узлов временной сетки и отнесения значений ДС к середине соответствующих временным интервалам является отличие восстановленного сигнала от его истинной (линейной) формы. Отметим, что выявленное отличие можно существенно уменьшить [129], если предварительно вычислить верхнюю и нижнюю границы функции $x = x([t_i])$ и использовать в качестве табличных значений $(i, (x_-(i) + x_+(i))/2)$ [21].

Таким образом, нахождение границ применимости известных методов интерполяции ДС в задаче восстановления $x(t)$ по значениям дискретного сигнала x_i , измеренное для некоторого значения интервальной переменной $[t_i]$, действительно, является актуальным.

Результаты оценки точности восстановления различных видов ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат узлов, в соответствии с данным (далее тривиальным) алгоритмом представлены в [31].

2.3 Исследование особенностей восстановления дискретных сигналов, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов

В данном разделе обсуждаются результаты исследования особенностей методов восстановления ДС, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов (Задачи 2), в том числе: метод адаптивных весов, предложенный Feichtinger, Grochenig и Strohmer [68]; метод Марвасти [111]; метод вытянутых

сфероидальных волновых функций $\psi_n(t)$ (Prolate Spheroidal Wave Functions, PSWF) [141,142]; метод интерполяции рядом Котельникова [17]; интерполяционные полиномы Лагранжа [98] и Ньютона [26], метод интерполяции сплайнами [26]. Данные методы реализованы в виде пакета «MATLAB Non-uniform sampling TOOLBOX» [27].

Отметим, что мы не рассматривали интерполяционные методы № 5 и № 6 (в соответствии с нумерацией, введенной в Главе 1), предложенные Tuncer [156] и Ефимовым, Бондаренко, Каспировичем, Резником [11,7], Margolis [105], так как они не могут быть использованы при данной постановке задачи. Действительно, данные методы предназначены только для реализации перехода от неравномерной временной сетки с числом узлов N на равномерную сетку с числом узлов N без повышения частоты дискретизации. В нашем случае из-за неопределенности значений координат отсчетов значения ДС x_i изначально сопоставляются узлам равномерной временной сетки.

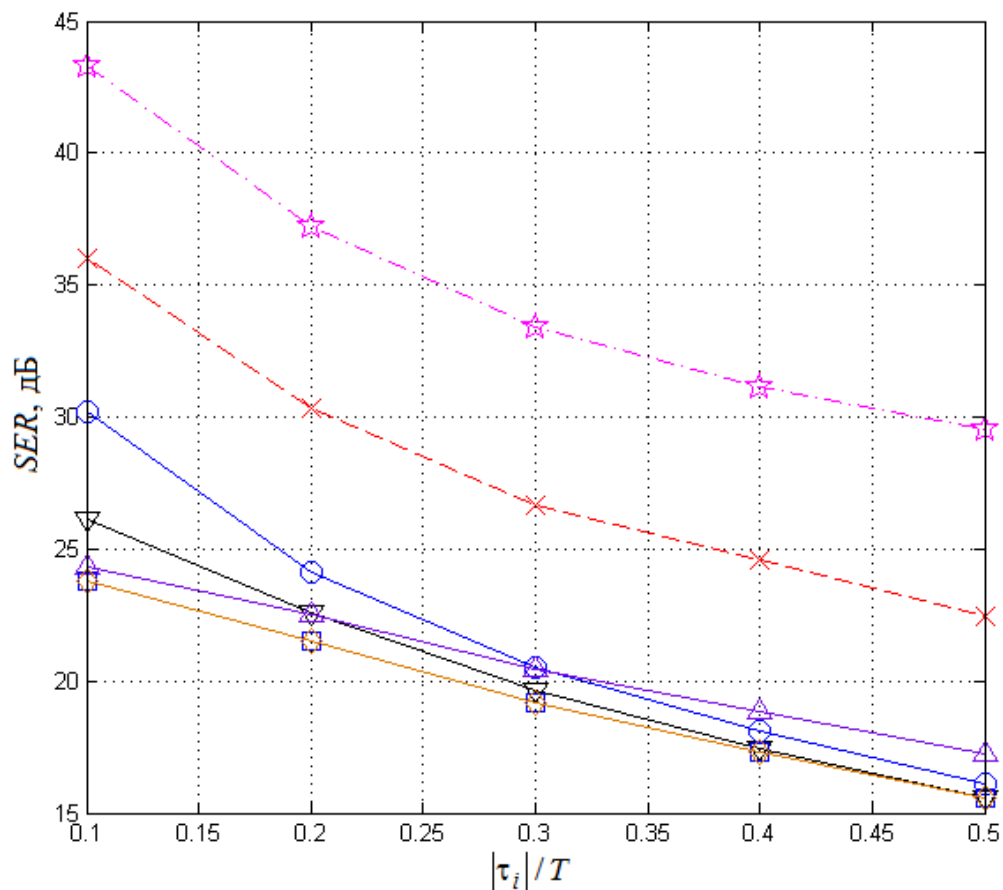


Рис. 2.4 Зависимости SER от $|\tau_i|/T$ при восстановлении сигнала № 3: ∇ – ряд Котельникова; \circ – кубический сплайн; \star – метод адаптивных весов; \triangle – метод сфероидальных функций; \times – метод Марvasti; \square – полином Ньютона; \diamond – полином Лагранжа

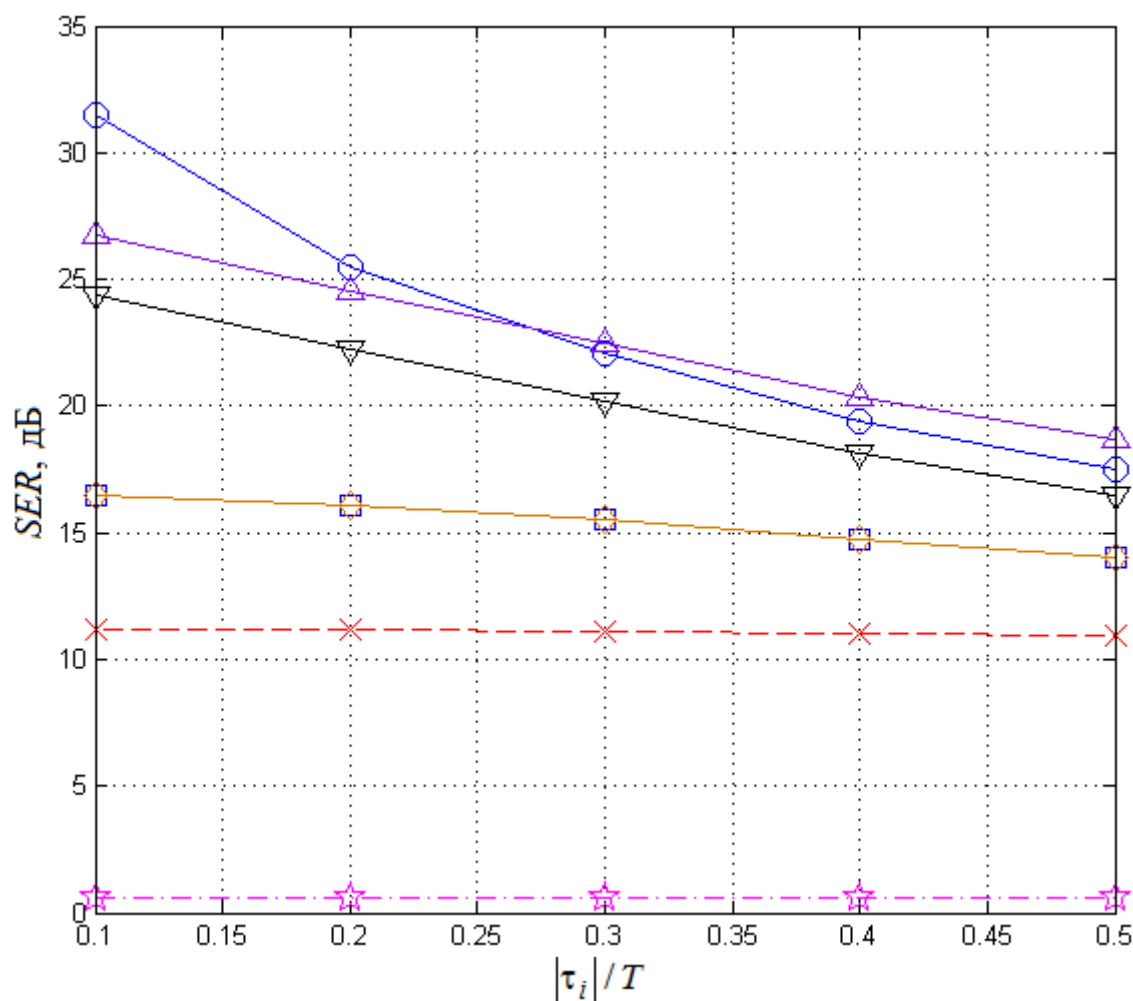


Рис. 2.5. Зависимости SER от $|\tau_i|/T$ при восстановлении сигнала № 4: ∇ — ряд Котельникова; \bigcirc — кубический сплайн; \star — метод адаптивных весов; \triangle — метод сфероидальных функций; \times — метод Марвасти; \square — полином Ньютона; \diamond — полином Лагранжа

Рассмотрим результаты восстановления модельных сигналов № 3–6 при равномерном законе распределения случайной величины τ , представленные, соответственно, на рис. 2.4–2.7. (Здесь, принимая во внимания, что в некоторых исследуемых методах восстановления ДС используется информация о числе спектральных гармоник, а функции, описывающие модельные сигналы № 1, 2, являются непериодическими, мы не применяли исследуемые методы к данным сигналам). Для того чтобы избежать высокой степени интерполяционного полинома в форме Лагранжа и Ньютона, при использовании этих методов отрезок интерполяции был разбит на части (локальные области размером пять точек), и на каждом частичном интервале строился самостоятельный (локальный) полином невысокой степени.

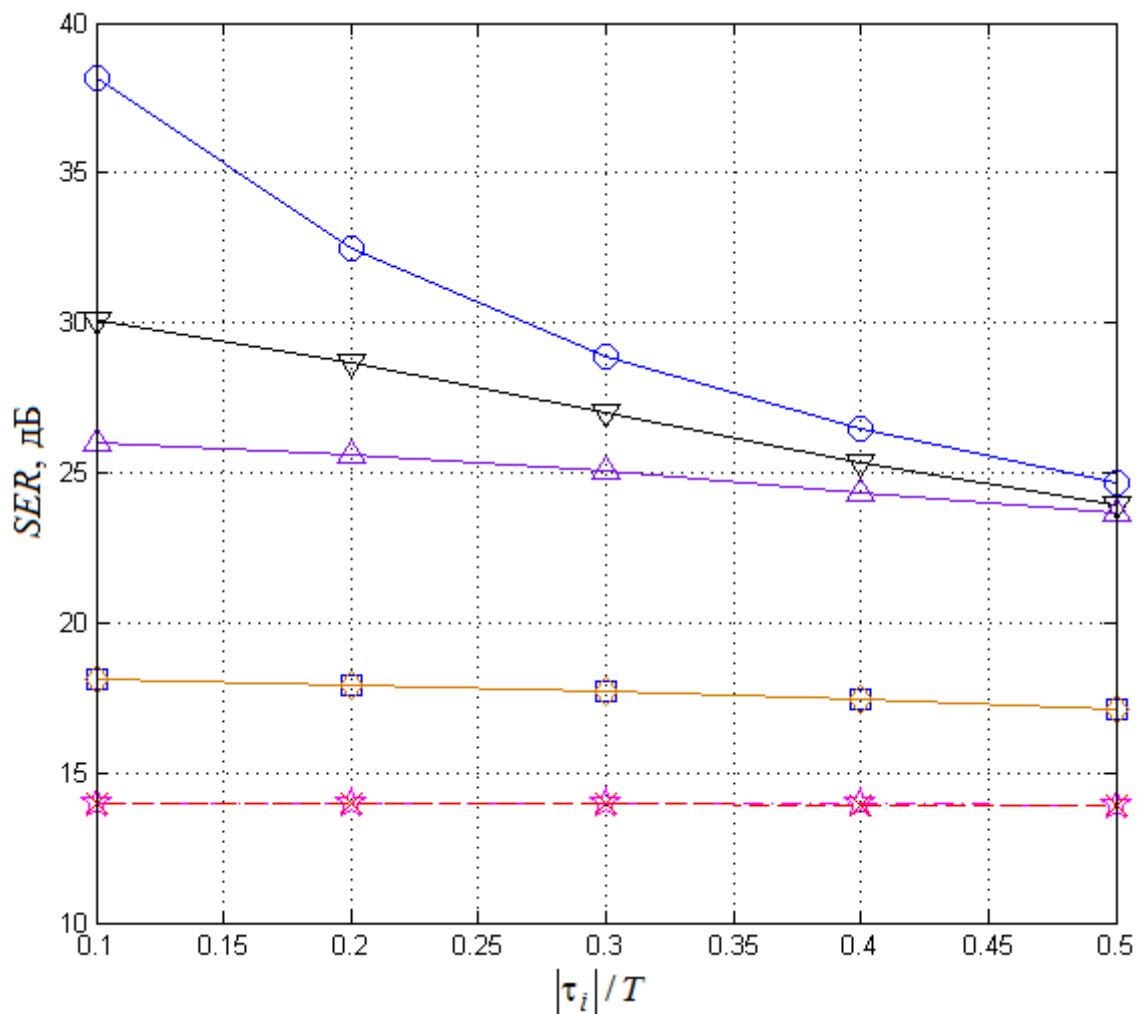


Рис. 2.6. Зависимости SER от $|\tau_i|/T$ при восстановлении сигнала № 5: ▽ — ряд Котельникова; ○ — кубический сплайн; ☆ — метод адаптивных весов; △ — метод сфероидальных функций; × — метод Марвасти; □ — полином Ньютона; ◇ — полином Лагранжа

Из рис. 2.4–2.7 видно:

1. Точность восстановления всех изученных интерполяционных методов уменьшается при увеличении величины джиттера для всех типов сигналов.
2. При восстановлении сигнала № 3 наиболее высокую точность имеет метод адаптивных весов, у которого значение SER изменяется в диапазоне [43.9, 28.6] дБ. (Для сравнения, при точном задании координат узлов временной сетки минимальное значение SER данного метода оказывается равным около 304 дБ.) К недостаткам данного метода следует отнести необходимость использования априорной информации о числе спектральных гармоник восстанавливаемого сигнала, которая на практике может отсутствовать. Наименьшее значение SER имеют методы интерполяции полиномом Лагранжа и Ньютона.

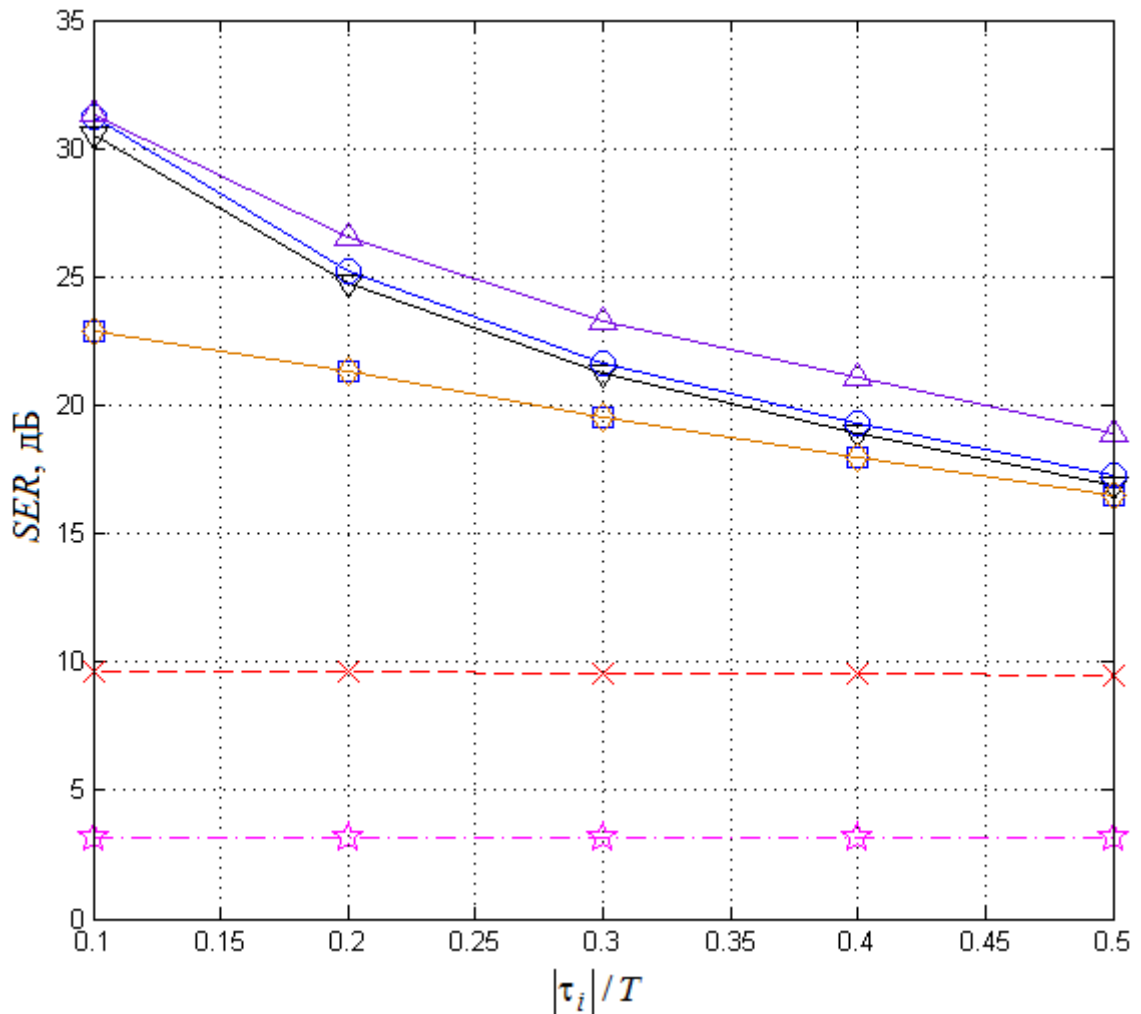


Рис. 2.7. Зависимости SER от $|\tau_i|/T$ при восстановлении сигнала № 6: ∇ – ряд Котельникова; \bigcirc – кубический сплайн; \star – метод адаптивных весов; \triangle – метод сфероидальных функций; \times – метод Марвасти; \square – полином Ньютона; \diamond – полином Лагранжа

3. При восстановлении сигнала № 4 наибольшее значение SER имеет метод интерполяции кубическими сплайнами. У данного метода значение SER изменяется в диапазоне [31.5, 17.6] дБ. Наименьшее значение SER оказывается у интерполяционного метода адаптивных весов.

4. При восстановлении сигнала № 5 наибольшее значение SER имеет метод интерполяции кубическими сплайнами. У данного метода значение SER изменяется в диапазоне [37.4, 24.9] дБ. Наименьшее значение SER оказывается у интерполяционного метода адаптивных весов.

5. При восстановлении сигнала № 6 наибольшее значение SER имеет метод сфероидальных функций, при этом с увеличением размаха джиттера Δ точность восстановления СИЧ-сигнала заметно снижается. У данного метода значение SER

изменяется в диапазоне [31.3, 18.9] дБ. Наименьшее значение SE_R для данного типа сигнала имеет метод адаптивных весов.

Таким образом, по результатам проведённого исследования можно сделать вывод, что с увеличением величины размаха джиттера $|\tau_i|/T$ точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными значениями координат ее узлов, с помощью интерполяционных методов значительно снижается, что определяет необходимость применения иных подходов к решению рассматриваемой задачи.

2.4 Исследование особенностей восстановления дискретных сигналов с помощью оптимизационных алгоритмов оценивания координат узлов временной сетки

В данном разделе обсуждаются результаты исследования методов восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, предложенные J. Browning [55,56] (ранее обозначались как оптимизационный алгоритм №1 и №2). Эти методы предполагают использование двух этапной процедуры восстановления данного типа дискретного сигнала. На первом этапе находятся значения неизвестных координат узлов временной сетки, являющиеся решением той или иной многопараметрической оптимизационной задачи. На втором этапе по вычисленным значениям координат производится интерполяция сигнала на равномерную временную сетку. Однако при описании данных методов автор не приводит каких-либо обоснований гипотезы о наличии у выбранной целевой функции глобального минимума, достигаемого при истинных значениях координат узлов временной сетки, а также не дает рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска параметров. Без этого, вообще говоря, гарантировать нахождение глобального, но не локального минимума оптимизируемой функции оказывается достаточно проблематичным. Кроме того в данных работах не обсуждаются вопросы точности восстановления дискретного сигнала на основе вычисленных значений координат узлов временной сетки [34].

Отмеченные обстоятельства определили необходимость проведения целенаправленного исследования данных методов в соответствии с методикой, описанной в начале данной главы. В данных исследованиях использовались модельный сигнал № 3, значения которого вычисляются в соответствии с (2.7), а также сигнал, использованный в [55] (сигнал № 7):

$$x_7(t_i) = u_i = 0.25 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\hat{f}\left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 0.265 \cos\left(\frac{10}{9}\pi\hat{f}\left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + \\ + 0.26 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\hat{f}\left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 0.25 \cos\left(2\pi\hat{f}\left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right), \quad (2.16)$$

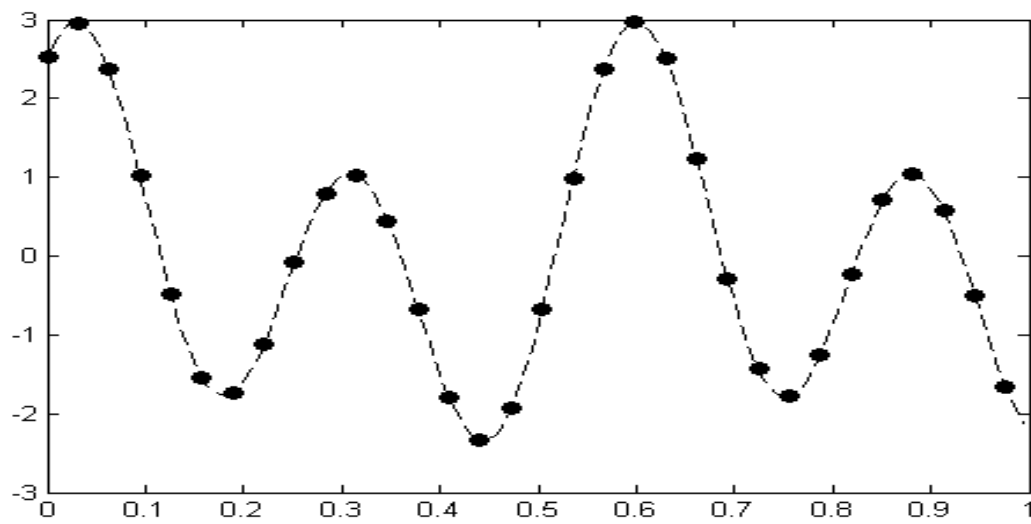
где $\hat{f} = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta\hat{f}_i \in (-0.5\hat{f}; 0.5\hat{f})$.

В проведенных вычислительных экспериментах для модельного сигнала № 3 (2.7) в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $(-0.03, 0.03)$ при безразмерной частоте дискретизации сигнала $\hat{f} = 0.4$, и $(-0.025, 0.025)$ при $\hat{f} = 0.1$. Число неравномерно расположенных отсчётов исходного сигнала – 32, $M = 128$. Число статистических испытаний – 50.

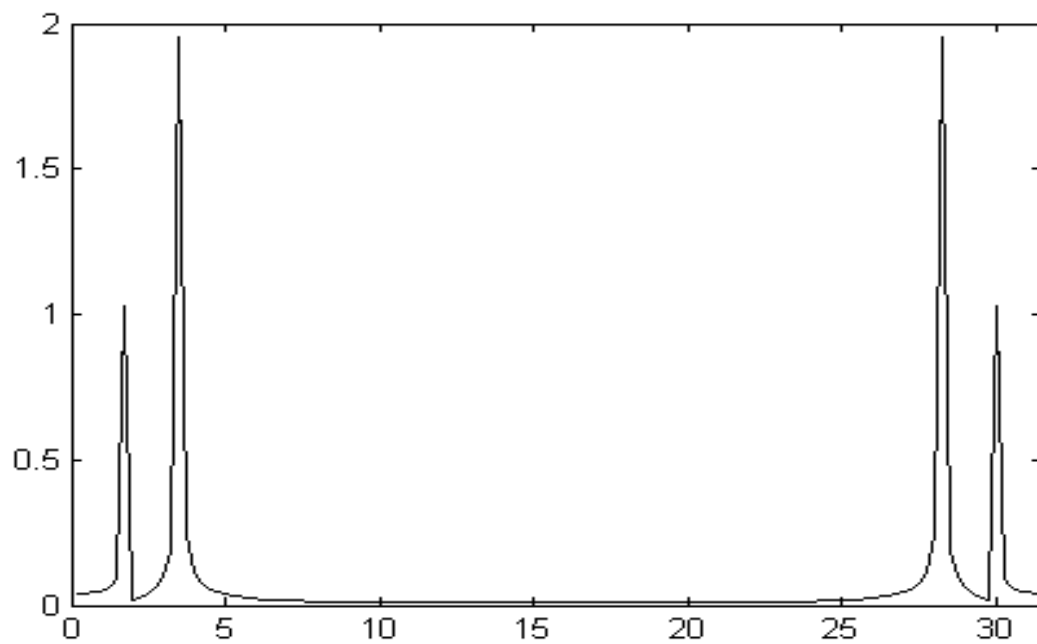
Для сигнала № 7 в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $(-0.016, 0.016)$. Число неравномерно расположенных отсчётов исходного сигнала – 32, безразмерная частота дискретизации сигнала $\hat{f} = 0.3$, $M = 128$. Число статистических испытаний – 50.

2.4.1 Анализ результатов исследования особенностей восстановления ДС в соответствии с оптимизационным алгоритмом № 1

Рассмотрим результаты исследования особенностей восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, в соответствии с алгоритмом № 3, представленные на рис. 2.8–2.10. Далее вычисленные значения координат узлов НВС будем обозначать как q_i , которые, как ожидается, обеспечивают достижение глобального минимума целевой функцией (1.67).



а)



б)

Рис. 2.8 ДС, заданный значениями в узлах РВС (а) и его спектр ДПФ (б)

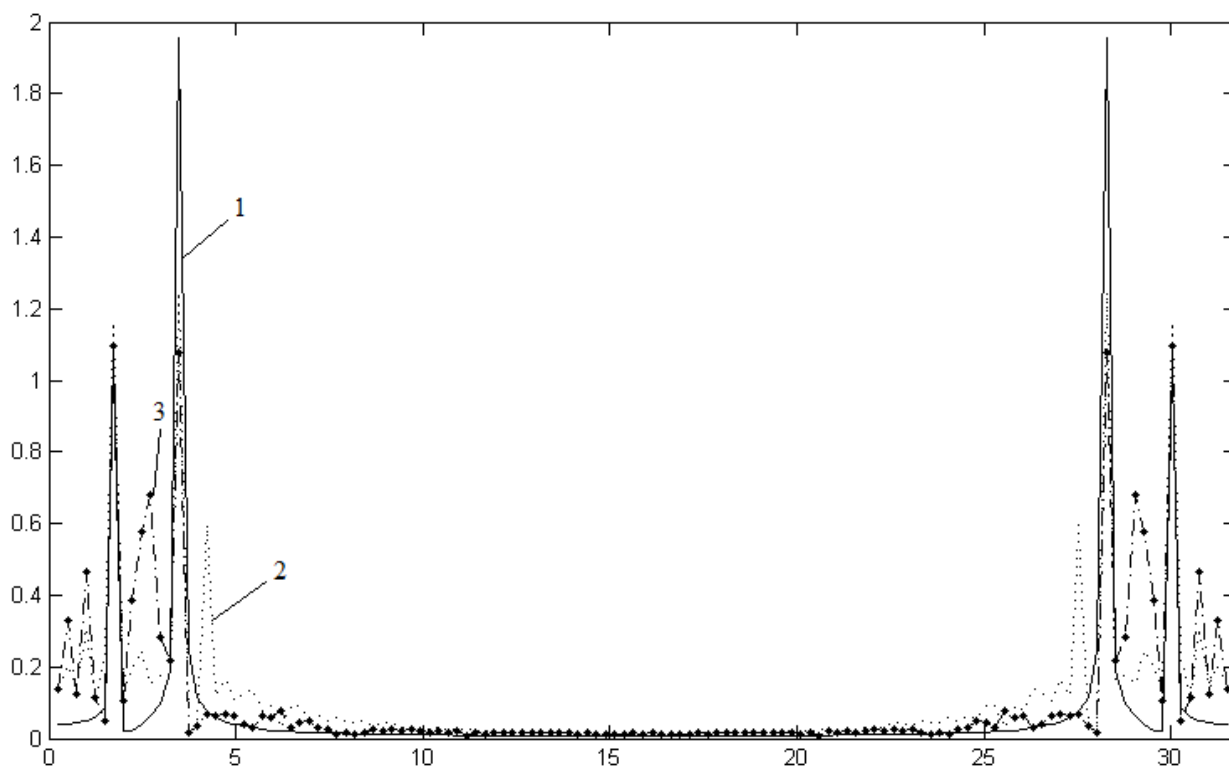


Рис. 2.9 Спектры: 1 – ДС, заданного в узлах РВС; 2 – ДС, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[t_i, x_i]$; 3 – ДС, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[q_i, x_i]$

Из 2.9 видно, что спектр, вычисленного по интерполируемым значениям сигнала $[q_i, x_i]$ (кривая № 3), существенно отличается от спектра исходного сигнала. Данное несоответствие возникает из-за погрешности сплайн-интерполяции, обусловленной погрешностью вычисления координат узлов q_i , которая автором даже не учитывалась. Также отметим, что в данном методе предполагается, что все спектральные составляющие, которые выходят за пределы значения L , равны нулю. Однако, как известно, при вычислении преобразования Фурье от сигнала конечной длительности данное условие будет выполняться только в том случае, если гармоники анализируемого сигнала в точности ортогональны базисным функциям, то есть на интервале анализа укладывается целое число периодов каждой гармоники. При анализе реальных сигналов конечной длительности данное условие, как правило, не выполняется, поэтому в спектре сигнала присутствуют дополнительные составляющие (см., например, [128]). В этой связи возникает вопрос о том, какую полосу частот при восстановлении реальных сигналов считать шириной спектра.

Зависимости мгновенных значений исходного сигнала и мгновенных значений сигнала, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[q_i, x_i]$, представлены на рис. 2.10, из которого видно, что сигналы достаточно сильно отличаются друг от друга. Данные отличия обусловлены несоответствием вычисленных значений координат узлов q_i и координат узлов истинной ВС.

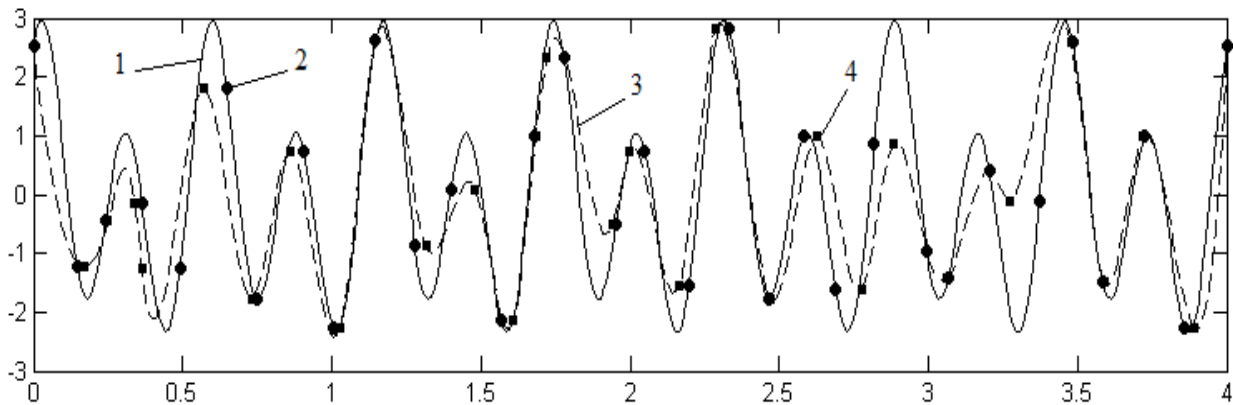


Рис. 2.10 Зависимости мгновенных значений: 1 – истинного сигнала; 2 – ДС u_i , заданного в узлах НВС t_i ; 3 – сигнала, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[q_i, x_i]$; 4 – ДС u_i , заданного на вычисленной НВС q_i , от времени

Отметим, что J. Browning не привел теоретического доказательства того, что целевая функция (1.67) имеет минимум только в том случае, если значения координат отсчётов по которым она была вычислена, совпадают с истинными значениями координат t_i отсчётов сигнала. В этой связи мы провели самостоятельное исследование данного вопроса, результаты которого представлены в табл. 2.1.

Из табл. 2.1 видно, что целевая функция (1.67) имеет глобальный минимум не только при истинных, но и при значениях координат отсчётов, отличных от истинных. При этом оказывается (см. табл. 2.1, столбец № 4), что точность восстановления модельного сигнала № 3 по таблице $[q_i, x_i]$, оказывается ниже точности восстановления по таблице $[iT, u_i]$.

Аналогичные результаты были получены для сигнала № 7 (см. рис. 2.11 и табл. 2.2).

Таблица 2.1 Результаты исследования оптимизационного алгоритма №1 при использовании ДС № 3

		Сигнал, восстановленны й по таблице $[t_i, x_i]$	Сигнал, восстановленны й по таблице $[q_i, x_i]$	Сигнал, восстановленны й по таблице $[iT, x_i]$
Среднее значение целевой функции C	$\hat{f}_1 = 0.1,$	0.06	0.03	0.6
	$\hat{f}_1 = 0.4,$	0.8	0.06	0.2
Среднеквадратическо е отклонение C	$\hat{f}_1 = 0.1,$	$5 \cdot 10^{-5}$	0.01	0.1
	$\hat{f}_1 = 0.4,$	0.09	0.01	0.01
Среднее значение параметра SER , дБ	$\hat{f}_1 = 0.1,$	56.7	12.0	16.8
	$\hat{f}_1 = 0.4,$	11.2	0.3	8.3
Среднеквадратическо е отклонение параметра SER	$\hat{f}_1 = 0.1,$	2.5	2.8	1.1
	$\hat{f}_1 = 0.4,$	1.1	3.8	0.9

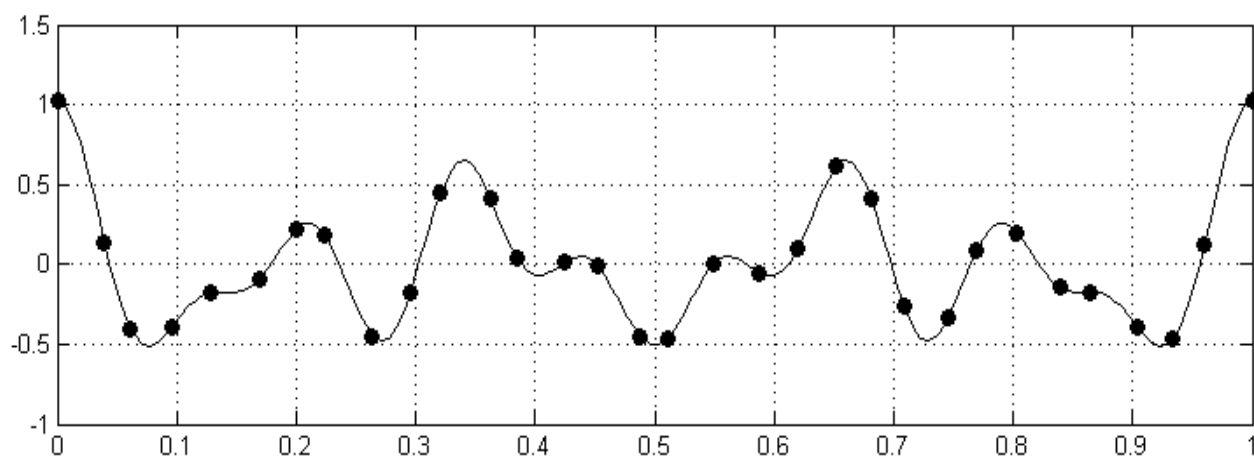


Рис. 2.11 Сигнал № 7 (точки – отсчёты ДС, использовавшиеся для восстановления сигнала №7)

Таблица 2.2 Результаты исследования оптимизационного алгоритма №1 при использовании ДС № 7

	Сигнал, восстановленный по таблице $[t_i, x_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[q_i, x_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[iT, x_i]$
Среднее значение целевой функции C	0.18	0.007	0.11
Среднеквадратическое отклонение целевой функции C	0.01	0.002	0.02
Среднее значение параметра SER , дБ	15.6	1.7	29.5
Среднеквадратическое отклонение параметра SER	1.0	2.7	1.1

Из табл. 2.2 видно, что метод нахождения значений координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенный в [55], имеет, вопреки ожиданиям, меньшую точность восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными координатами его узлов, в сравнении с тривиальным подходом восстановления по таблице $[iT, x_i]$.

2.5.2 Анализ результатов исследования точности восстановления ДС в соответствии с оптимизационным алгоритмом № 2

Рассмотрим результаты анализа точности восстановления сигналов № 3 ($\hat{f}_1 = 0.1$), № 7 ($\hat{f}_1 = 0.3$), полученные при использовании метода оценки координат узлов временной сетки, предложенного в [56] (см. табл. 2.3).

Из табл. 2.3 видно, что использование метода нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенного в [56] не обеспечивает повышения точности восстановления сигнала. Тривиальный подход восстановления по таблице $[iT, x_i]$ обеспечивает более высокую точность.

Также отметим, что для сигнала № 7 минимум целевой функции достигается при истинных значениях координат узлов временной сетки только в том случае, когда на интервале анализа укладывается целое число периодов каждой гармонике исходного сигнала, выполнение которого на практике удается обеспечить далеко не для каждого сигнала.

Таблица 2.3 Результаты исследования оптимизационного алгоритма №2 при использовании ДС № 3,7

	Сигнал	Сигнал, восстановленны й по таблице $[t_i, x_i]$	Сигнал, восстановленны й по таблице $[q_i, x_i]$	Сигнал, восстановленны й по таблице $[iT, x_i]$
Среднее значение целевой функции $\langle \alpha, \{q_i\} \rangle$	№3	5.7	3.0	8.1
	№7	$1.2 \cdot 10^{-14}$	0.2	1.4
Среднеквадратичес кое отклонение $\langle \alpha, \{q_i\} \rangle$	№3	0.2	0.6	0.7
	№7	$2.9 \cdot 10^{-15}$	0.07	0.4
Среднее значение параметра SER , дБ,	№3	51.0	5.0	16.5
	№7	29.2	0.1	14.5
Среднеквадратичес кое отклонение параметра SER	№3	1.8	5.3	1.1
	№7	2.5	5.6	1.1

2.5 Выводы по главе

1. Результаты исследования интерполяционных методов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными значениями координат узлов, позволяют сделать следующие выводы:

1.1. Точность восстановления всех изученных интерполяционных методов уменьшается при увеличении величины джиттера для всех типов сигналов.

1.2. Для модельного сигнала № 3 (периодического сигнала) наименее чувствительным к неопределенности задания узлов временной сетки оказывается метод адаптивных весов, у которого значение SER при максимальном размахе джиттера составляет 29 дБ, однако, данный метод требует знания априорной информации о числе спектральных гармоник исходного сигнала, которая на практике оказывается известной далеко не всегда.

1.3. Для модельных сигналов № 4, № 5 (ЛЧМ-сигнал и АМ-сигнал, соответственно) наибольшую точность восстановления сигнала обеспечивает метод сплайн-интерполяция: SER принимает значения в диапазоне [32,17] дБ и [36,25] дБ соответственно, при изменении размаха джиттера в диапазоне $[0,1;0.5]T$, где T – расстояние между узлами ВС при отсутствии джиттера.

1.4. Для модельного сигнала № 6 (СИЧ-сигнал) наибольшую точность восстановления обеспечивает метод сфероидальных функций: SER принимает значения в диапазоне [32, 18] дБ, при изменении размаха джиттера в диапазоне $[0,1;0.5]T$, T – расстояние между узлами ВС при отсутствии джиттера.

2. Результаты исследования оптимизационных методов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными значениями координат узлов, позволяют сделать следующие выводы:

2.1. Метод нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенный в [55], в сравнении с тривиальным подходом восстановления по таблице $[iT, x_i]$ имеет меньшую точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с точно неизвестными координатами узлов.

2.2. Метод нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенный в [56], в сравнении с тривиальным подходом восстановления по таблице $[iT, x_i]$ имеет меньшую точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с точно неизвестными координатами узлов.

Глава 3 Разработка и исследование алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов

Результаты исследования особенностей восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, показывают, что методам восстановления, рассмотренных в Главе 2, присущи недостатки, влияющие на точность восстановления изучаемых ДС.

В данной главе приведено обоснование оригинальных алгоритмов, обеспечивающих более высокую точность восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, в сравнении с аналогичными алгоритмами, исследованными в Главе 2 и результаты количественного анализа данных алгоритмов.

3.1 Алгоритмы восстановления ДС, заданного в узлах временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, основанные на корректировке значений координат отсчетов

3.1.1 Алгоритм восстановления ДС, основанный на использовании метода статистических испытаний

Для случая, когда известен закон распределения джиттера, для решения задачи восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов, можно предложить следующий подход, основанный на методе статистических испытаний [32]. Проиллюстрируем основную идею данного подхода на пример линейного тренда. Из (2.15) видно, что восстановленное значение ДС отличается от истинного значения сигнала на величину $\tilde{a}\tau_i$, где \tilde{a} – истинное значение углового коэффициента прямой, проходящей через i -ый и $i+1$ -ый отсчеты ДС, τ_i – i -ое значение джиттера. Следовательно, если для ансамбля независимых значений τ_i иметь N независимых значений восстановленного сигнала x_i , то в качестве оценки истинного значения восстановленного сигнала можно использовать среднее по ансамблю восстановленных значений:

$$\bar{x}_i = \langle \tilde{x}_i \rangle + a \langle \tau_i \rangle, \quad (3.1)$$

но при наличии достаточно большого числа реализаций $\langle \tilde{x}_i \rangle \approx \tilde{x}_i$, $\langle \tau_i \rangle \approx 0$.

Таким образом, целесообразно вместо НВС (2.1) ставить значения ДС в соответствие временной сетке

$$\xi_{i,j} = iT + \tau_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (3.2)$$

где столбцы матрицы $\tau_{i,j}$ – векторы, координаты которых – случайные числа, выбираемые случайным образом из генеральной совокупности с заданным законом распределения случайной величины (ЗРСВ); J – число независимых реализаций ансамблей N -мерных векторов; $\langle \cdot \rangle$ – символ усреднения по ансамблю реализаций. Далее с помощью тех или иных методов интерполяции производить вычисление на основе таблицы $[\xi_{i,j}, x_i]$ в узлах ВС (2.2) значений ДС $\tilde{x}_{m_1,j}$, и далее вычислять искомое значение сигнала x_{m_1} как среднее значение по ансамблю независимых реализаций сигнала $\tilde{x}_{m_1,j}$:

$$x_{m_1} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tilde{x}_{m_1,j}, \quad m_1 = \overline{1, M_1}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (3.3)$$

Предложенный алгоритм (далее алгоритм № 1) реализуется следующей последовательностью действий.

1. Задание числа испытаний $NTrial$ (числа шагов метода Монте-Карло).
2. Инициализация счетчик числа шагов метода статистических испытаний: $j = 1$.
3. Задание числа узлов неравномерной временной сетки r .
4. Задание равномерной временной сетки (2.2).
5. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайной величины $\xi_{i,j}, i = \overline{1, r}$.
6. Восстановление на основе табличных значений $[\xi_{i,j}, x_i]$ с помощью линейной интерполяции значений дискретного сигнала $\tilde{x}_{m_1,j}$ в узлах временной сетки (2.2).
7. Увеличение значения счетчика цикла: $j = j + 1$.
8. Если $j \leq NTrial$, повторение пп. 5–7.
9. Усреднение восстановленных значений сигнала по ансамблю реализаций:

$$\tilde{x}_m = \frac{1}{NTrial} \sum_{j=1}^{NTrial} \tilde{x}_{j,m}.$$

3.1.2 Алгоритм восстановления, основанный на учете знака мгновенных значений джиттера

Поясним основную идею данного алгоритма на примере линейной интерполяции ДС x_i , заданного в узлах ВС (2.2). Как и в предыдущем алгоритме будем сопоставлять значения ДС координатам временной сетки

$$\xi_i = iT + \delta_i, \quad (3.4)$$

где δ_i – случайные числа, имеющие закон распределения аналогичный, закону распределения случайных чисел τ_i . Тогда коэффициенты прямой, аппроксимирующей восстанавливаемый сигнал, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a \frac{((i+1)T + \tau_{i+1}) - (iT + \tau_i)}{T + \delta_{i+1} - \delta_i} = a \frac{T + \tau_{i+1} - \tau_i}{T + \delta_{i+1} - \delta_i}, \\ \tilde{b} &= x_i - \tilde{a}(iT + \delta_i). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что можно уменьшить погрешность вычисления коэффициентов прямой и, соответственно, увеличить точность восстановления сигнала, если выбирать из генеральной совокупности случайных чисел $\{\delta_i\}$ те, которые имеют знаки, совпадающие со знаками случайных чисел τ_i [28]. Тогда вероятность появления значений разностей $\delta_{i+1} - \delta_i$ близких к соответствующим значениям разностей $\tau_{i+1} - \tau_i$ будет выше, за счет уменьшения области рассеяния случайной величины $\delta_{i+1} - \delta_i$. Для подтверждения высказанной гипотезы было проведено статистическое моделирование случайной величины в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Генерация случайной последовательности $\{\tau_i\}$, $i = \overline{1, 10000}$ с равномерным законом распределения на интервале $(-0.1; 0.1)$.
2. Генерация случайной последовательности $\{\delta^{(1)}_i\}$ с равномерным законом распределения на интервале $(-0.1; 0.1)$.
3. Генерация случайной последовательности $\{\delta^{(2)}_i\}$ с равномерным законом распределения на интервале $(-0.1; 0.1)$, знаки членов которой совпадают со знаками последовательности $\{\tau_i\}$.

4. Вычисление значений угловых коэффициентов прямой $a^{\langle 1 \rangle}$ и $a^{\langle 2 \rangle}$ в соответствии с (3.5) ($T = 1$), используя $\{\delta^{\langle 1 \rangle}_i\}$, $\{\delta^{\langle 2 \rangle}_i\}$, соответственно.

В результате выполнения данного алгоритма были получены случайные последовательности $a_j^{\langle 1 \rangle}, a_j^{\langle 2 \rangle}, j = \overline{1, 9999}$. Гистограммы случайных последовательностей $a_j^{\langle 1 \rangle}, a_j^{\langle 2 \rangle}$ представлены на рис. 3.1, 3.2, соответственно.

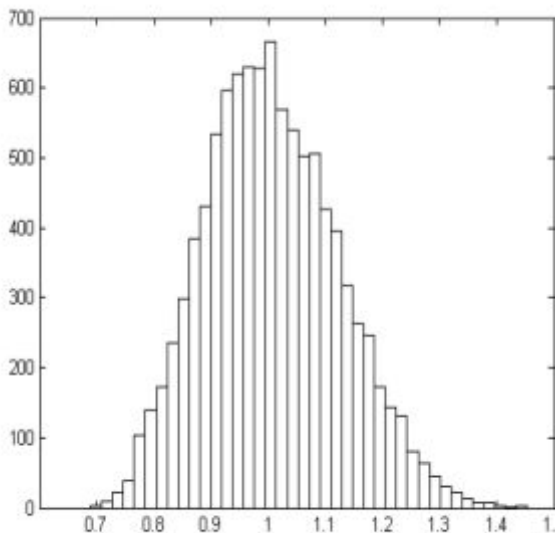


Рис. 3.1. Гистограмма случайной последовательности $a_j^{\langle 1 \rangle}$

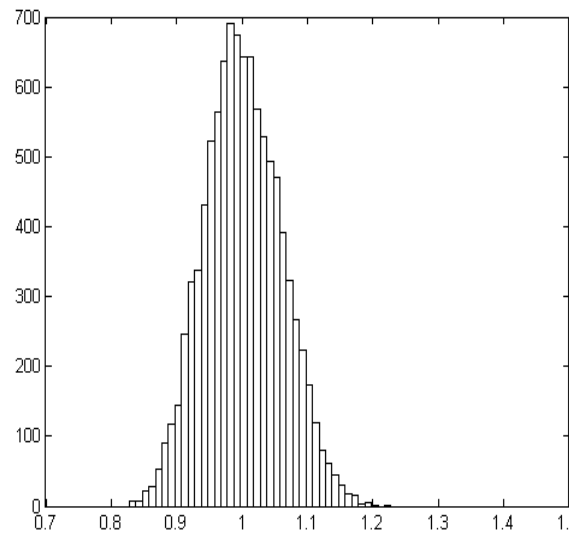


Рис. 3.2. Гистограмма случайной последовательности $a_j^{\langle 2 \rangle}$

Из рис. 3.1, 3.2, видно, что, действительно, случайная последовательность $a_j^{\langle 1 \rangle}$ имеет область рассеяния $[0.7; 1.45]$, случайная последовательность $a_j^{\langle 2 \rangle} - [0.83; 1.23]$, т.е. область рассеяния второй последовательности оказывается примерно в 2 раза меньше области рассеяния первой последовательности. Таким образом, действительно, предложенный подход позволяет повысить точность оценки аппроксимирующей прямой и, следовательно, точность восстановления сигнала при условии, что известен знак каждого из отсчетов.

Аналогичное моделирование в соответствии с описанным выше алгоритмом было проведено для случайных последовательностей $b_j^{\langle 1 \rangle}, b_j^{\langle 2 \rangle}$ с нормальным законом распределения с $N(0, 0.1)$ (рис. 3.3, 3.4).

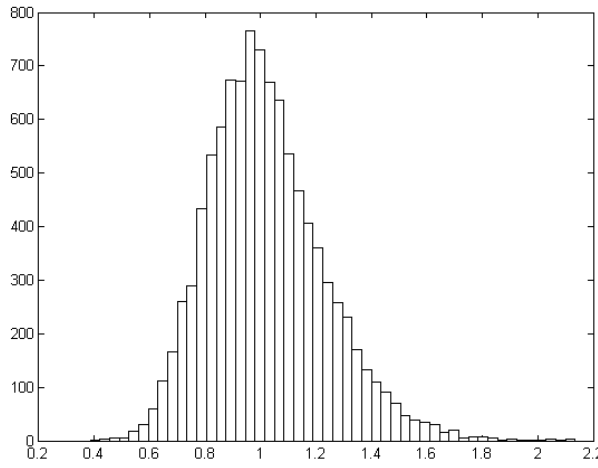


Рис. 3.3. Гистограмма случайной последовательности $b_j^{(1)}$

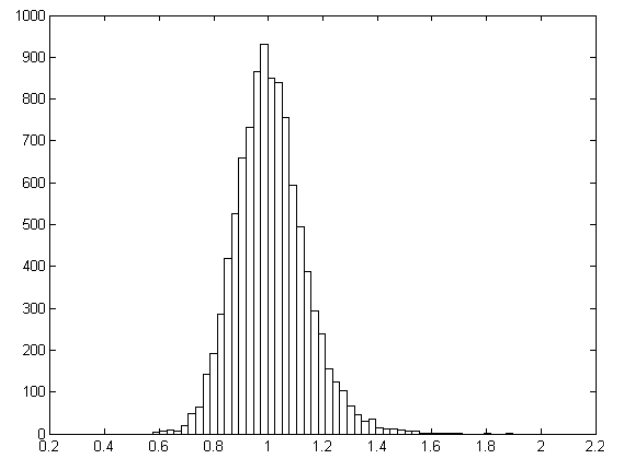


Рис. 3.4. Гистограмма случайной последовательности $b_j^{(2)}$

Из рис. 3.3, 3.4, видно, что, случайная последовательность $b_j^{(1)}$ имеет область рассеяния $[0.4; 1.83]$, случайная последовательность $b_j^{(2)}$ – $[0.6; 1.58]$, т.е. область рассеяния второй последовательности оказывается меньше области рассеяния первой последовательности. Таким образом, при нормальном законе распределения случайной величины, предложенный подход также позволяет повысить точность оценки аппроксимирующей прямой и, следовательно, точность восстановления сигнала при условии, что известен знак каждого из отсчетов.

Мы предположили, что можно оценивать знак случайных чисел $\{\tau_i\}$ в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Восстановление с помощью того или иного метода интерполяции (например, линейной) значений ДС в узлах ВС $\left(i - \frac{1}{2}\right)T$ и $\left(i + \frac{1}{2}\right)T$ на основе табличных значений сигнала $[iT, x_i]$, соответственно, $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $i = \overline{1, r}$.
2. Вычисление разностей $\left|u_i^{(1)} - x_i\right|$, $\left|u_i^{(2)} - x_i\right|$.
3. Сравнение друг с другом значений $\left|u_i^{(1)} - x_i\right|$, $\left|u_i^{(2)} - x_i\right|$: при выполнении условия $\left|u_i^{(1)} - x_i\right| \leq \left|u_i^{(2)} - x_i\right|$ принимаем, что τ_i в (2.1) имеет отрицательный знак, в противном случае τ_i в (2.1) имеет положительный знак.

Принимая во внимания, что алгоритм оценки знака джиттера является по своей сути эвристическим, были получены оценки правильности определения знака τ_i в соответствии с данным алгоритмом, представленные в табл. 3.1. Здесь использовались модельные сигналы №1–6, описанные в Разделе 2, значения которых задавались в узлах неравномерной временной сетки с джиттером, которые обрабатывались в соответствии с описанным выше алгоритмом. Для получения статистически устойчивых результатов доля отсчётов, для которых знак мгновенного значения джиттера τ_i был определен правильно, вычислялась как среднее по ансамблю независимых статистических испытаний, число испытаний равнялось 100.

Таблица 3.1 Доля отсчетов, для которых знак мгновенного значения джиттера τ_i был определен правильно

Модельный сигнал	Закон распределения	
	Равномерный ЗРСВ τ_i	Нормальный ЗРСВ τ_i
№ 1	0.84±0.04	0.80±0.04
№ 2	0.82±0.04	0.78±0.04
№ 3	0.84±0.04	0.88±0.04
№ 4	0.72±0.04	0.64±0.04
№ 5	0.71±0.03	0.60±0.04
№ 6	0.72±0.04	0.67±0.04

Из таблицы 3.1 видно, что доля правильно определенных знаков мгновенных значений джиттер τ_i составляет для равномерного закона распределения случайной величины не менее 72%, для нормального закона распределения случайной величины – не менее 60%. Полученный результат позволяет ожидать, что алгоритм восстановления сигнала с учетом знака мгновенных значений джиттера будет иметь более высокую точность в сравнении с алгоритмами, рассмотренными в Главе 2.

Таким образом, алгоритм восстановления № 2 реализуется следующей последовательностью действий [24].

1. Задание числа узлов r неравномерной временной сетки, равного количеству узлов восстанавливаемого сигнала x_i .
2. Задание равномерной временной сетки (2.2).

3. Восстановление с помощью того или иного метода интерполяции (например, линейной) значений дискретного сигнала в узлах временных сеток $\left(i - \frac{1}{2}\right)T$ и $\left(i + \frac{1}{2}\right)T$ на основе табличных значений сигнала $[iT, x_i]$, соответственно, $u^{(1)}_i$ и $u^{(2)}_i$, $i = \overline{1, r}$.
4. Вычисление разностей $\left|u^{(1)}_i - x_i\right|$, $\left|u^{(2)}_i - x_i\right|$.
5. Сравнение друг с другом значений $\left|u^{(1)}_i - x_i\right|$, $\left|u^{(2)}_i - x_i\right|$: при выполнении условия $\left|u^{(1)}_i - x_i\right| \leq \left|u^{(2)}_i - x_i\right|$ принимаем, что τ_i в (2.1) имеет отрицательный знак, в противном случае τ_i в (2.1) имеет положительный знак.
6. Инициализация счетчика случайной последовательности: $j = 1$.
7. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайного числа ζ .
8. Сравнение знаков ζ, τ_j . Если знаки $\text{sign}(\zeta) = \text{sign}(\tau_j)$, то $\delta_j = \zeta, j = j + 1$, иначе повторить п. 7.
9. Если $j < r$ повторить пп. 7, 8.
10. Восстановление дискретного сигнала u_m в узлах временной сетки (2.2) на основе табличных значений $[iT + \delta_i, x_i]$.

3.1.3 Алгоритм восстановления № 3, основанный на вычислении значений координат узлов неравномерной сетки с помощью аппроксимации по МНК

Как было показано в Главе 2, наиболее простым методом восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно значениями мгновенных отсчетов джиттера, основан на вычислении значений ДС по таблице $[iT, x_i]$. В связи с тем, что значения координат узлов iT отличаются от истинных значений координат (2.1) на случайную величину τ_i (джиттер), понятно, что значения ДС будут отличаться от точного значения сигнала на

$$\Delta_i = x(iT + \tau_i) - x(iT). \quad (3.6)$$

В первом приближении значение Δ может быть оценено первым членом разложения (3.6) в ряд Тейлора:

$$\Delta_i \approx x'(iT)\tau_i. \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что погрешность задания ординат узлов интерполяции, напрямую определяющая точность восстановления значений ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов, будет пропорциональна значению джиттера τ_i . Следовательно, можно ожидать, что при соответствующей корректировке значений координат узлов НВС произойдет увеличение точности значений ДС.

Принимая во внимание, что в случае, когда значения ординат узловых точек заданы с погрешностью, для восстановления ДС целесообразно использовать, следуя [16], локальную аппроксимацию ДС в соответствии с МНК. Тогда для корректировки значений джиттера можно использовать следующий подход. Выберем длину окна локальной аппроксимации, равной $2m+1$, где m – число узлов ВС, расположенных слева и справа от i -ого узла ВС, и вид функции $f(t, a, b, \dots)$, аппроксимирующей ДС на данном локальном отрезке $[i-m, i+m]$ по таблице значений $[v_i, x_i]$, (на первом шаге итерации $v_i = iT$, $i = \overline{1, N}$). Далее вычислим в соответствии с МНК оценки значений параметров функции a_i, b_i, \dots . Решив уравнение

$$f(v_i, a_i, b_i, \dots) = x_i \quad (3.8)$$

относительно v_i , находим уточненное значение

$$\tilde{\tau}_i = v_i - iT. \quad (3.9)$$

Отметим, что для нахождения уточненного значения джиттера $\tilde{\tau}_i$ в соответствии с (3.8), (3.9), требуется находить решение уравнения (3.8), которое может быть, в общем случае, нелинейным. Поэтому на практике с вычислительной точки зрения более удобно задать на интервале $[(i-1)T, (i+1)T]$ равномерную ВС $\xi_j = j\Delta t$, $\Delta t = \frac{(i+1)T - (i-1)T}{M_2} = \frac{2T}{M_2}$, где M_2 выбирается таким, чтобы $\Delta t \ll 2T$, вычислить в ее узлах значения аппроксимирующей функции, затем найти среди них, то значение для которого

$$\tilde{j} = \min_j \arg |x_i - f(\xi_j, a, b, \dots)|$$

и считать, что

$$\tilde{\tau}_i = \xi_{\tilde{j}} - iT.$$

Далее принимая $v_i = iT + \tilde{\tau}_i$, повторяем данную процедуру корректировки значений джиттера, в соответствии с заданным количеством итераций.

Блок-схема данного алгоритма (алгоритм восстановления № 3) приведена на рис. 3.3.

Входными данными алгоритма являются:

1) значения восстанавливаемого ДС: T – период дискретизации отсчетов временной сетки (2.1); x_i – множество значений дискретного сигнала, вычисленные в узлах временной сетки (2.1), $i = \overline{1, N}$.

2) параметры восстановленного ДС, которые выбираются исходя из требований решаемой задачи: T_1 – период дискретизации временной сетки η_{m_1} (2.2); M_1 – число узлов временной сетки η_{m_1} (2.2).

3) параметры аппроксимирующего полинома и параметры итерационной процедуры, которые выбираются в зависимости от закона распределения случайной величины τ_i , периода дискретизации T , вида восстанавливаемого сигнала: K – число точек локальной области, по которым строится аппроксимирующий полином в смысле МНК; n – степень аппроксимирующего полинома; M_2 – число узлов временной сетки χ_{m_2} , которая задается в алгоритме (M_2 должно быть в несколько раз больше, чем M_1); L – число шагов итерации.

Выходными данными алгоритма являются: восстановленные в узлах временной сетки η_{m_1} значения дискретного сигнала u_{m_1} .

Из рис. 3.3 видно, что данный алгоритм реализуется следующей последовательностью действий [29]:

1. Задание равномерной временной сетки η_{m_1} (2.2) (блок 1).
2. Инициализация вектора $v_i = iT$, $i = \overline{1, N}$ (блок 2).
3. Инициализация счетчика цикла итерационной процедуры алгоритма (блок 3) $l = \overline{1, L}$, (L – число итераций, задается из условий конкретной задачи). На каждом новом шаге итерации используются обновленные значения v_i , которые с каждой следующей итерацией приближаются к истинным значениям координат ДС.
4. Создание массива g_i , $i = \overline{1, N}$, в котором далее хранятся уточненные значения координат узлов новой неравномерной временной сетки (блок 4).

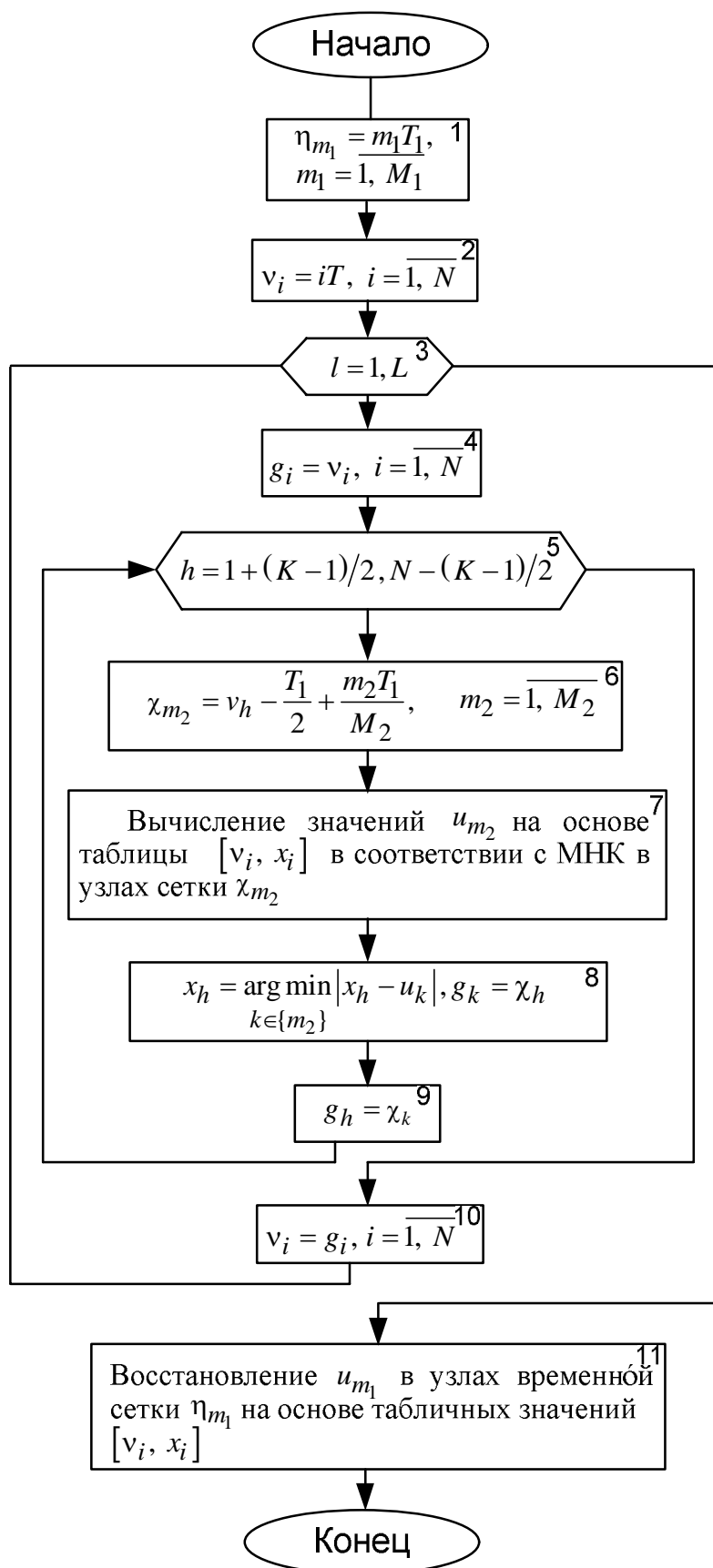


Рис. 3.3 Блок-схема алгоритма восстановления №3

5. Инициализация счетчика вложенного цикла h последовательных сдвигов локальной области с числом точек K (блок 5), по которым далее строится аппроксимирующий в смысле МНК полином на основе табличных значений $[v_i, x_i]$, $h = \overline{1 + (K - 1)/2, N - (K - 1)/2}$. (Число циклов h равняется $(N - K)$).

6. Задание на интервале $[t_h - T_1/2; t_h + T_1/2]$ равномерной временной сетки (блок 6):

$$x_{m_2} = v_h - \frac{T_1}{2} + \frac{m_2 T_1}{M_2}, \quad m_2 = \overline{1, M_2}. \quad (3.10)$$

7. Вычисление значений аппроксимирующего в соответствии с МНК полинома n -ой степени u_{m_2} , параметры которого вычисляются по K точкам на основе табличных значений $[v_i, x_i]$, $i = \overline{1, N}$, в узлах равномерной ВС x_{m_2} (3.10) (блок 7).

8. Нахождение значения u_k , удовлетворяющего условию: $\arg \min_{k \in \{m_2\}} |x_h - u_k|$, абсцисса которого принимается за новое значение временной сетки v_i (блок 8) и заносится в массив g : $g_h = x_k$ (блок 9).

9. Повторение пп. 6–8 $(N - K)$ раз.

10. Присвоение значений $v_i = g_i$ – формирование новой ВС v_i (блок 15), в узлах которой в следующем цикле итерации вычисляются значения u_{m_2} (блок 10).

11. Повторение пп. 4–10 L раз.

12. Восстановление с помощью того или иного метода интерполяции (например, линейной) на основе таблицы $[v_i, x_i]$ значений дискретного сигнала u_{m_1} в узлах временной сетки η_{m_1} (2.2) (блок 11).

Для подтверждения возможности уточнения мгновенных значений джиттера в соответствии с данным алгоритмом было проведено статистическое моделирование, в ходе которого на каждом k -ом шаге вычислялись:

1. значения модельного ДС в узлах неравномерной временной сетки (2.1);
2. в соответствии с алгоритмом № 4 абсциссы точек полиномов, построенных на локальных временных интервалах по методу наименьших квадратов, по значениям которых находились мгновенные значения джиттера $\tilde{\tau}_i$.
3. погрешности оценок мгновенных значений джиттера δ_i :

$$\delta_i = |\tilde{\tau}_i - \tau_i|, i = \overline{1, 100}.$$

4. мощность джиттера P_{τ_i} :

$$P_{\tau_k} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \tau_i^2,$$

5. мощность случайной последовательности δ_i :

$$P_{\delta_k} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \delta_i^2.$$

Далее были вычислены средние по ансамблю реализаций значения мощности джиттера

$$\langle P_{\tau} \rangle = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} P_{\tau_k},$$

и мощности случайной последовательности δ :

$$\langle P_{\delta} \rangle = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} P_{\delta_k}.$$

Оценки мощности $\langle P_{\delta} \rangle$ и мощности джиттера $\langle P_{\tau} \rangle$, полученные в результате статистического моделирования, представлены в табл. 3.1. Здесь использовались модельные сигналы № 1–6, описанные в Разделе 2, значения которых задавались в узлах НВС с джиттером. Для модельных сигналов № 3,4,6 размер локальной области равнялся 7, степень полинома – 5, для сигнала № 2 размер локальной области – 7, степень полинома 3, для сигнала № 5 размер локальной области – 17, степень полинома 10.

Таблица 3.2 Значения $\langle P_{\tau} \rangle$ и мощности джиттера $\langle P_{\delta} \rangle$

Модельный сигнал	Равномерный ЗРСВ $\tau_i, \delta_i, 10^{-4}$		Нормальный ЗРСВ $\tau_i, \delta_i, 10^{-5}$	
	$\langle P_{\tau} \rangle$	$\langle P_{\delta} \rangle$	$\langle P_{\tau} \rangle$	$\langle P_{\delta} \rangle$
№ 1	2.1±0.2	0.2±0.06	2.4±0.3	0.3±0.09
№ 2	2.1±0.2	0.4±0.08	2.4±0.2	0.6±0.02
№ 3	2.1±0.2	1.0±0.20	2.4±0.3	1.5±0.10
№ 4	2.1±0.2	0.9±0.20	2.4±0.2	1.4±0.20
№ 5	2.1±0.2	1.5±0.20	2.4±0.2	1.6±0.10
№ 6	2.1±0.2	1.2±0.30	2.4±0.2	1.6±0.20

Из таблицы 3.2 видно, что для всех видов модельных сигналов мощность $\langle P_{\delta} \rangle < \langle P_{\tau} \rangle$ независимо от ЗРСВ. Следовательно, предложенная процедура

корректировки позволяет получать оценки мгновенных значений джиттера $\tilde{\tau}_i$, которые оказываются достаточно близкими к истинным значениям джиттера. Полученный результат позволяет ожидать, что алгоритм № 3, в котором используются скорректированные значения координат узлов ВС, будет обеспечивать более высокую точность восстановления ДС в сравнении с алгоритмами, рассмотренными в Главе 2.

Отметим, что описанные в данном подразделе алгоритмы, основанные на корректировке значений координат отсчетов, не требуют решения каких-либо сложных оптимизационных задач, а также знания априорной информации о положении первых/последних отсчетов, в отличие от методов, предложенных J. Browning, для использования которых необходима информация о значениях первого и второго моментов распределения джиттера или информации о спектре восстанавливаемого сигнала. Для оценки точности рассматриваемых алгоритмов является целесообразным проведение соответствующего исследования восстановления модельных ДС, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов.

3.2 Алгоритмы восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неопределенными координатами узлов, основанные на использовании скорректированных значений ДС

3.2.1 Алгоритм восстановления №4, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра

В результате неопределенности точных местоположений отсчетов, отнесение значений сигнала x_i к узлам равномерной временной сетки, означает восстановление сигнала по таблице (iT, x_i) . В данном случае $x_i = \tilde{x}_i + \Delta_i$, где \tilde{x}_i – истинные значения сигнала в узлах равномерной сетки iT , Δ_i – составляющая ДС, обусловленная незнанием точных значений координат узлов временной сетки (2.1).

В 1 главе было показано (рис. 1.44–1.49), что последовательности Δ_i вне зависимости от вида функции распределения величины τ_i в (2.1) являются некоррелированными случайными последовательностями. При этом функции распределения случайных величин Δ_i оказываются отличными от функции

распределения случайных величин τ_i . Данный результат можно понять, рассмотрев случай $\tau_i \ll T$, для которого, как очевидно,

$$\Delta_i \approx x'(iT)\tau_i, \quad (3.11)$$

т.е. в первом приближении Δ_i есть результат умножения значения производной дискретизируемого сигнала $x(t)$ в точке iT на случайную величину τ_i .

Таким образом, исходные данные, на основе которых решается задача восстановления ДС, представляют собой аддитивную смесь сигнала $\tilde{x}_i = x(iT)$ и некоррелированного шума Δ_i . Следовательно, для повышения точности восстановления сигнала по таблице (t, x_i) , где $t = iT$, $i = 1, 2, 3 \dots M_0$, целесообразно предварить восстановление ДС вычислительными процедурами, позволяющими уменьшить вклад шумовой составляющей Δ_i , например, используя для этого нерекурсивный цифровой фильтр (НЦФ), реализующий сглаживание ДС по методу скользящего среднего или методу наименьших квадратов (МНК). Применение данных типов НЦФ эквивалентно вычислению уточненных значений ДС, как значений полинома, аппроксимирующего ДС на локальных отрезках, длительность, которых мала в сравнении с длительностью ДС [38].

Рассмотрим механизм действия НЦФ на примере ДС, представляющего собой отсчеты периодической функции вида

$$x_i = \sin(2\pi f_0 t_i), \quad (3.12)$$

вычисленные в узлах НВС (2.1). В данном случае ДС представляет собой смесь истинных значений и некоррелированного шума, обусловленного незнанием точных значений координат временной сетки (2.1).

Как известно [38], действие ЦФ на смесь сигнала и некоррелированного шума оказывается двояким. С одной стороны, ЦФ уменьшает энергию шумовой составляющей Δ_i :

$$(E_\Delta)_f = E_\Delta \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

где $(E_\Delta)_f$ – энергия шума на выходе ЦФ, E_Δ – энергия шума на входе ЦФ, N – размер окна сглаживания, c_k – коэффициенты фильтра. (Уменьшение шумовой составляющей,

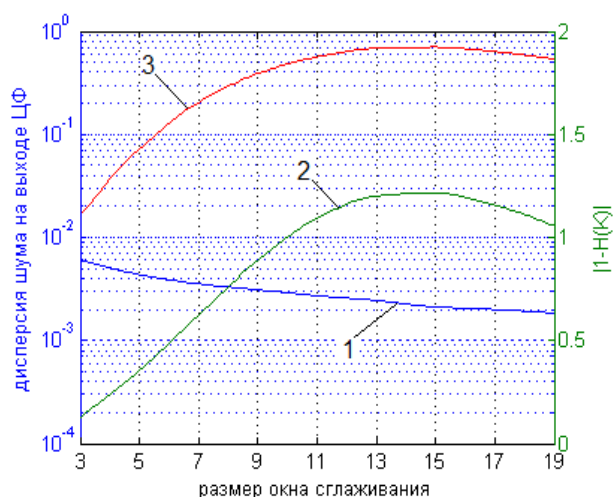
в свою очередь, позволяет ожидать уменьшение погрешности значений ДС в узлах интерполяции.)

С другой стороны, НЦФ действует на пропускаемый через него ДС, изменяя его амплитуду. (Напомним, что для количественной оценки действия НЦФ используется амплитудно-частотная характеристика НЦФ $H(K)$, зависящая от частоты дискретизации ДС, размера окна сглаживания K и вида локальной аппроксимации сигнала.) Это в свою очередь приводит к увеличению погрешности значений ДС в узлах интерполяции. Следовательно, для каждого конкретного ДС будет существовать некоторый оптимальный размер окна сглаживания, который обеспечивает минимальное отличие между истинными значениями ДС в узлах РВС и сглаженными значениями ДС [30].

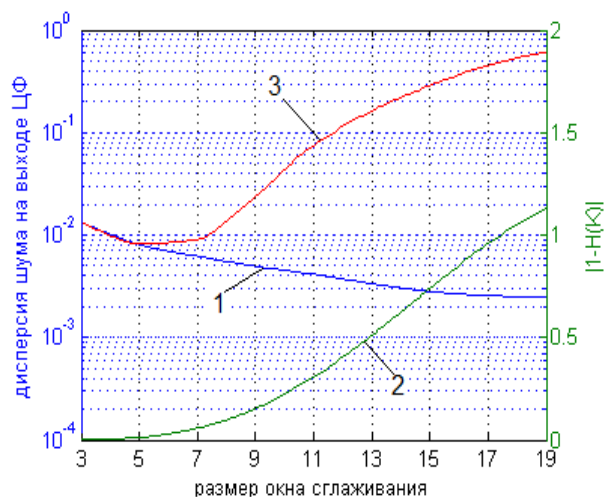
Для подтверждения, приведенных выше качественных рассуждений о механизме действия НЦФ на ДС были вычислены:

1. Значения периодического сигнала (3.12) с безразмерной частотой $\hat{f} = 0.1$ в узлах временной сетки (2.1), где $M_0 = 100$, τ_i – числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале $(-0.1, 0.1)$,
2. Для выбранных НЦФ зависимости дисперсии шума на выходе НЦФ от K .
3. Для выбранных НЦФ значения функции $|1 - H(K)|$.
4. Для выбранных НЦФ зависимости значения SER , вычисляемые в соответствии с (2.3), от размера окна сглаживания K . (Здесь для вычисления восстановленных значений ДС использовалась линейная интерполяция).

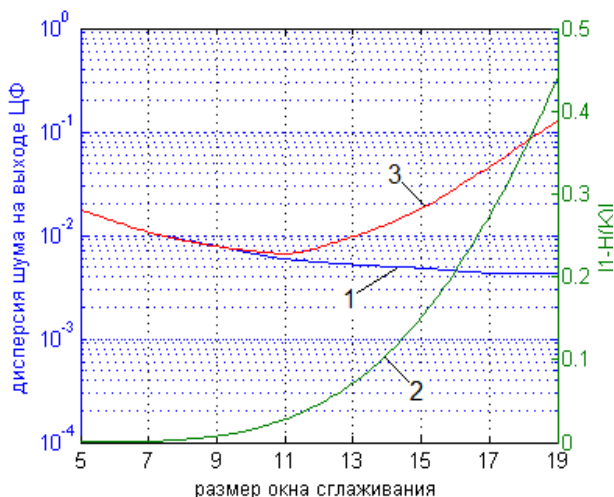
Данные зависимости представлены на рис. 3.5 (здесь кривая 1 – зависимость дисперсии шума на выходе НЦФ от K ; кривая 2 – функция $|1 - H(K)|$; кривая 3 – зависимость SER от K).



а) НЦФ, реализующий сглаживание скользящими средними



б) ЦФ, реализующий сглаживание по МНК полиномом 2-й степени



в) ЦФ, реализующий сглаживание по МНК полиномом 4-й степени

Рис. 3.5 – К объяснению результатов, получаемых при использовании алгоритма № 4

Из рис. 3.5. видно, что, действительно, предваряя восстановление дискретного сигнала процедурой скользящего сглаживания, при правильном выборе соотношения между размером окна сглаживания и степенью аппроксимирующего полинома, удастся повысить точность восстановления дискретного сигнала, представляющего собой дискретные отсчеты периодического сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно значениями координат ее узлов. Оценки точности восстановления других типов дискретного сигнала при использовании предложенного подхода приведены далее в Разделе 3.3.

Алгоритм восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно значениями координат ее узлов,

основанный на использовании скользящего сглаживания по МНК (далее алгоритм № 4), реализуется следующей последовательностью действий.

1. Выбор размера окна сглаживающего фильтра и степень полинома, аппроксимирующего сигнал
2. Пропускание сигнала $x(t_i)$ через соответствующий нерекурсивный фильтр – получение ДС $\tilde{x}(t_i)$.
3. Восстановление сигнала по таблице значений $[t, \tilde{x}(t_i)]$ в узлах равномерной сетки (2.2) одним из классических интерполяционных способов.

3.2.2 Алгоритм восстановления, основанный на локальной аппроксимации сигнала по МНК (алгоритм № 5)

Еще в 80-х годах прошлого века специалистами активно обсуждались методы решения задач регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора [8]. Постановки этих задач были описаны в первой главе.

Как было отмечено, по результатам сравнения задач регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора и восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки, можно сделать вывод, что данные задачи сходны по своей постановке. Следовательно, существует потенциальная возможность использования подходов к решению задачи регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора в задаче восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки. Однако анализ приведенных авторами [37,16,14] методов решения задач регрессии показывает, что основное внимание исследователей было направлено на получение вычислительных алгоритмов, позволяющих определять оценки параметров стохастических моделей, а не собственно алгоритмов вычисления истинных значений наблюдений, вычисляемых по данным моделям, и их точности. Это не позволяет напрямую использовать данные методы в задаче восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки, однако, соответствующие подходы, особенно локальная аппроксимация, представляются достаточно конструктивными.

Рассмотрим особенности восстановления дискретного сигнала, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов, с помощью локальной аппроксимации по методу наименьших квадратов. В этом случае будет производиться вычисление уточненных значений дискретного сигнала, как значений полинома второй степени или выше, аппроксимирующего дискретного сигнала на локальных отрезках, длительность которых мала в сравнении с длительностью дискретного сигнала [38]. Здесь необходимо отметить, что в данном алгоритме, также как и в алгоритме № 3, используется локальная аппроксимация по методу наименьших квадратов. Однако данные алгоритмы принципиально различны. В алгоритме № 3, используя аппроксимирующий полином, уточняются неизвестные значения координат узлов неравномерной временной сетки, в то время как в данном алгоритме вычисляются в соответствии с методом локальной аппроксимации коэффициенты аппроксимирующего полинома, и далее непосредственно значения дискретного сигнала.

Алгоритм восстановления, основанный на применении локальной аппроксимации сигнала по методу наименьших квадратов (далее алгоритм № 5), реализуется следующей последовательностью действий.

1. Выбор размера скользящего окна $K = 2m + 1$, на котором будет строиться аппроксимирующий полином.
2. Инициализация счетчика числа шагов: $h = 1 + (K - 1) / 2$.
3. Построение на локальном интервале, содержащем K точек, полинома, аппроксимирующего сигнал в смысле метода наименьших квадратов, по таблице $[t(z), x_i(z)]$, где $z = h - \frac{K-1}{2}, h - \frac{K-1}{2} + 1, \dots, h + \frac{K-1}{2}$.
4. Вычисление значений аппроксимирующего полинома (восстановленных значений сигнала u_m) в узлах равномерной временной сетки η_{m_1} (2.2) принадлежащих отрезку $[t(h) - 0.5 \cdot T; t(h) + 0.5 \cdot T]^2$.
5. Сдвиг скользящего окна – увеличение значения счетчика цикла: $h = h + 1$.
6. Если $h \leq M_0 - (K - 1) / 2$, повторение пп. 3–5.

²В узлах временной сетки $\eta_m \in [t(1), t(1+(K-1)/2)]$ и $\eta_m \in [t(M_0-(K-1)/2), t(M_0)]$ восстановление значений сигнала u_m осуществляется вычислением значений аппроксимирующего полинома, построенного в первой и последней локальной области соответственно.

Анализ данного алгоритма, позволяет сделать вывод о том, что точность восстановления дискретного сигнала будет зависеть от размера локальной области, на которой проводится построение аппроксимирующего полинома, и порядка аппроксимирующего полинома. Действительно, с одной стороны, увеличение размера областей локальной аппроксимации будет приводить к уменьшению погрешности коэффициентов аппроксимирующих моделей, вычисляемых в соответствии с МНК, и, следовательно, уменьшению погрешности значений восстанавливаемого дискретного сигнала. Однако, с другой стороны, увеличение размера окна аппроксимации будет приводить к увеличению отличий между аппроксимирующим полиномом и восстанавливаемым дискретным сигналом. В этой связи, можно ожидать, что для любого типа восстанавливаемого сигнала существует некоторое оптимальное соотношение между размером локальной области аппроксимации и степенью полинома, используемого для локальной аппроксимации дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно координатами ее узлов, обеспечивающее наименьшую погрешность восстановления дискретного сигнала.

Для подтверждения проведенных выше качественных рассуждений алгоритм № 5 был использован для восстановления описанного ранее сигнала (3.12), заданного в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов. Зависимости энергии остатков аппроксимационных моделей (суммы квадратов разностей $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ между точными значениями дискретного сигнала (3.12) и значениями аппроксимирующего полинома) от размера локальной области аппроксимации для полиномов 2, 3 и 4-го порядков представлены на рис. 3.6.

Из рис. 3.6 видно, что зависимости $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ от размера области локальной аппроксимации для каждого из рассмотренных полиномов имеют локальный минимум. Для полиномов 2, 3 и 4 значение абсцисс минимумов зависимости $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ от размера локальной аппроксимации области равняется 5, 7 и 11 точкам, соответственно. Аналогичные зависимости для других типов сигналов представлены далее в Разделе 3.3.

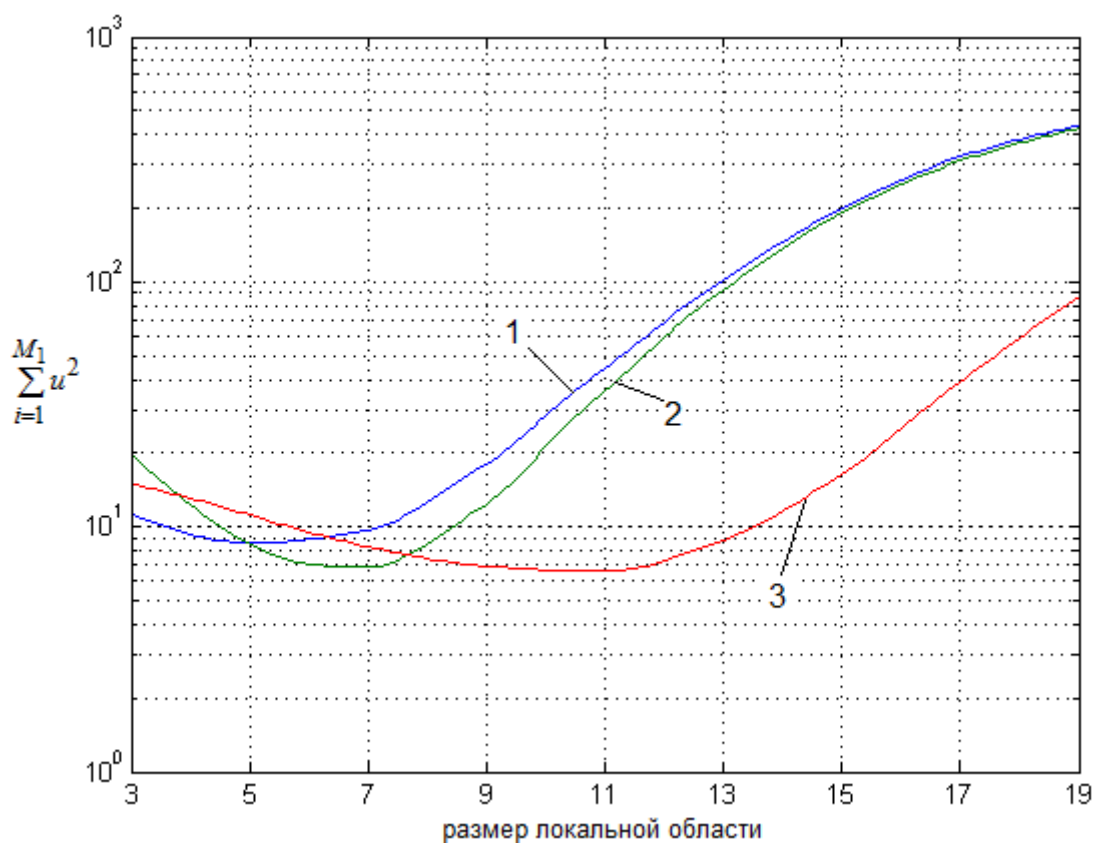


Рис. 3.6 Зависимость $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ от размера локальной области K при аппроксимации ДС: 1 – полиномом 2-й степени; 2 – полином 3-й степени, 3 – полином 4-й степени

Отметим, что рассмотренные в данном разделе алгоритмы не требуют решения каких-либо сложных оптимизационных задач, а также знания априорной информации о положении первых/последних отсчетов, в отличие от методов, предложенных J. Browning.

3.3 Анализ результатов исследования точности алгоритмов восстановления ДС, основанных на корректировке значений координат узлов

3.3.1 Анализ точности восстановления линейного тренда

Рассмотрим результаты исследований, проведенных в соответствии с описанной в Главе 2 методикой, точности восстановления модельного сигнала № 1 – линейного тренда (2.4), значения которого заданы в узлах НВС (табл. 3.3), $|\tau_i|/T = 0.5$. При исследовании точности восстановления линейного тренда с помощью алгоритма № 1

число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При реализации алгоритма восстановления № 3 использовался полином первой степени, размеры областей локальной аппроксимации – 5 точек, число итераций $H = 5$.

Таблица 3.3 Среднее значение и среднеквадратическое отклонение (СКО) параметра SER при восстановлении линейного тренда в соответствии с алгоритмами № 1–3

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	67.2	0.2	76.8	0.2
№ 1	68.4	0.2	77.2	0.2
№ 2	70.3	0.3	78.9	0.1
№ 3	76.9	0.6	86.1	0.5

Из табл. 3.3 видно, что вне зависимости от ЗРСВ τ_i наибольшее среднее значение параметра SER имеет алгоритм № 3. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 9.7 дБ и на 9.3 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i . Точность восстановления линейного тренда в рассматриваемом случае (среднее значение SER) при нормальном ЗРСВ τ_i , оказывается выше аналогичной величины при равномерном ЗРСВ τ_i . Данный результат объясняется тем, что в рассмотренных случаях СКО σ нормального ЗРСВ τ_i

выбиралось из условия $3\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$, где Δ – размер области рассеяния случайной

величины τ_i с равномерным законом распределения. При этом значение области рассеяния случайное величины τ_i , в котором укладывается 97,4% всех случайных

чисел («эффективный» размах джиттера), как известно, равно $2\sigma = \frac{\Delta}{3\sqrt{3}}$. При

равномерном законе распределения случайной величины δ_i «эффективный» размах джиттера равен Δ , т.е. в $3\sqrt{3}$ раза больше аналогичной величины при нормальном законе распределения.

3.3.2. Анализ точности восстановления полиномиального тренда

Рассмотрим результаты восстановления модельного сигнала № 2 – полиномиального тренда (2.5), значения которого были вычислены в узлах НВС $t_i = iT + \tau_i$, $i = \overline{1, 1000}$, $\tau_i / T = 0.5$, представленные в табл. 3.4. При исследовании точности восстановления полиномиального тренда с помощью алгоритма № 1 число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При восстановлении полиномиального тренда с помощью алгоритма № 3 использовались: полиномы второй степени и третьей степени, размеры областей локальной аппроксимации – 5 и 7 точек. Число итераций $H = 10$.

Таблица 3.4. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении полиномиального тренда в соответствии с алгоритмами №1–3

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	61.0	0.2	70.6	0.3
№ 1	62.1	0.3	71.0	0.4
№ 2	64.6	0.5	72.5	0.5
№ 3	67.3	0.7	76.2	0.6

Из табл. 3.4 видно, что вне зависимости от ЗРСВ τ_i наибольшее среднее значение параметра SER имеет алгоритм №3. При равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 6.3 дБ, при нормальном ЗРСВ τ_i – на 5.6 дБ. Точность восстановления полиномиального тренда в рассматриваемом случае (среднее значение SER) при нормальном ЗРСВ τ_i , оказывается выше аналогичной величины при равномерном ЗРСВ τ_i .

3.3.3. Анализ точности восстановления периодического сигнала

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 3 – периодического сигнала (2.7), значения которого заданы в узлах НВС (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. При исследовании точности восстановления сигнала с помощью

алгоритма № 1 число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При использовании алгоритма № 3 для восстановления периодического сигнала, заданного в узлах НВС при равномерном ЗРСВ τ_i , использовался полином пятой степеней, размер области локальной аппроксимации – 7 точек. Число итераций $H = 5$. Результаты экспериментов представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5 Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении периодического сигнала с помощью тривиального алгоритма и алгоритмов № 1–3.

Алгоритм восстановления	Используемый метод интерполяции	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	Адапт. весов	29.6	2.7	38.8	2.7
	Марвасти	21.8	1.7	31.2	1.3
	Сплайн	16.5	0.6	25.9	0.9
№ 1	Адапт. весов	28.0	2.3	38.6	2.6
	Марвасти	21.3	0.7	28.5	1.3
	Сплайн	16.4	0.5	25.9	0.9
№ 2	Адапт. весов	30.8	3.1	38.6	2.6
	Марвасти	19.5	2.4	31.0	2.1
	Сплайн	17.9	0.9	26.6	1.2
№ 3	Адапт. весов	30.3	2.8	39.8	1.2
	Марвасти	22.3	1.3	31.2	1.3
	Сплайн	20.0	1.0	29.4	1.3

Из табл. 3.5 видно, что наибольшее среднее значение параметра SER для изученных алгоритмов при равномерном ЗРСВ τ_i оказывается при восстановлении сигнала алгоритмом №2 с использованием метода адаптивных весов, при нормальном ЗРСВ τ_i – алгоритмом № 3. Применение метода Марвасти в данных алгоритмах не повышает точность восстановления сигналов в сравнении с тривиальным алгоритмом. Восстановление ДС с помощью метода сплайн-интерполяции имеет меньшую точность, однако является более предпочтительным с практической точки зрения в сравнении с методами адаптивных весов и Марвасти, так как данные методы требуют использования априорной информации о восстанавливаемом сигнале, которая на практике может оказаться неизвестной.

Также необходимо отметить, что более высокую точность восстановления метод адаптивных весов и итерационный метод Марвасти обеспечивают только при восстановлении периодического сигнала. При этом ошибка восстановления с помощью

последнего метода существенно возрастает при увеличении безразмерной частоты дискретизации \hat{f} . Напротив, метод сплайн интерполяции показывает стабильно хорошие результаты при восстановлении всех видов изученных модельных сигналов и не требует знания какой-либо дополнительной априорной информации о сигнале.

3.3.4 Анализ точности восстановления ЛЧМ-сигнала

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 4 – сигнала с линейной частотной модуляцией (2.9), значения которого заданы в узлах НВС (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$, представленные в табл. 3.6. Здесь при исследовании алгоритма восстановления № 1 число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При реализации алгоритма № 3 использовался полином пятой степеней, размер области локальной аппроксимации равнялся 7 точкам. Число итераций $H = 5$.

Таблица 3.6 Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении ЛЧМ-сигнала в соответствии с алгоритмами №1–3

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	18.2	0.6	26.7	0.7
№ 1	19.0	0.7	26.9	0.7
№ 2	19.5	0.8	28.3	0.9
№ 3	20.7	0.8	28.2	0.9

Из табл. 3.6 видно, что наибольшее среднее значение параметра SER для изученных алгоритмов при равномерном ЗРСВ τ_i оказывается у алгоритма № 3, при нормальном ЗРСВ τ_i – у алгоритмов № 2,3. При равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма № 3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 2.5 дБ, при нормальном ЗРСВ τ_i – на 1.5 дБ. Аналогично, средние значения параметра SER при нормальном ЗРСВ τ_i оказались выше, чем при равномерном ЗРСВ τ_i .

3.3.5 Анализ точности восстановления сигнала с амплитудной модуляцией

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 5 – амплитудно-модулированного сигнала (2.11), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. Результаты моделирования приведены в табл. 3.7. При исследовании алгоритма восстановления №1 число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При реализации алгоритма № 3 использовался полином седьмой степеней, размер области локальной аппроксимации 17 точек. Число итераций $H = 5$.

Таблица 3.7 Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении АМ-сигнала в соответствии с алгоритмами №1–3

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	25.5	0.8	35.2	1.2
№ 1	24.6	0.8	35.2	1.2
№ 2	27.1	1.2	35.6	1.0
№ 3	29.8	1.4	37.4	1.1

Из табл. 3.7 видно, что наибольшее среднее значение параметра SER при равномерном ЗРСВ τ_i для изученных алгоритмов оказывается у алгоритма № 3. При равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма № 3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 4.3 дБ, при нормальном ЗРСВ τ_i – на 2.2 дБ.

3.3.6 Анализ точности восстановления сигнала со скачкообразным изменением частоты

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 6 – сигнала со скачкообразным изменением частоты (2.13), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$, представленные в табл. 3.8. При исследовании алгоритма восстановления № 1 число шагов метода статистических испытаний равнялось 1000. При исследовании алгоритма

№ 3 для равномерного ЗРСВ τ_i использовался полином пятой степени, размер области локальной аппроксимации – 7 точек. Число итераций $H = 5$.

Таблица 3.8 Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении сигнала с СИЧ в соответствии с алгоритмами №1–3

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	17.9	0.6	26.3	0.7
№ 1	18.7	0.7	26.5	0.7
№ 2	18.4	1.1	27.3	0.8
№ 3	22.7	1.0	30.0	1.0

Из табл. 3.8 видно, что наибольшее среднее значение параметра SER для изученных алгоритмов оказывается у алгоритма №3 вне зависимости от ЗРСВ τ_i . При равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма № 3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 4.8 дБ, при нормальном ЗРСВ τ_i – на 3.7 дБ. Аналогично, средние значения параметра SER при нормальном ЗРСВ τ_i оказались выше, чем при равномерном ЗРСВ τ_i .

Таким образом, анализ результатов исследования на основе статистического моделирования алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов позволяет сделать вывод о том, что точность восстановления линейного тренда, полиномиального тренда, периодического сигнала, ЛЧМ-сигнала, АМ-сигнала и СИЧ-сигнала оказывается выше при использовании алгоритма восстановления № 3 вне зависимости от ЗРСВ τ_i .

3.4 Анализ результатов исследования точности алгоритмов восстановления, основанных на корректировке значений ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно координатами ее узлов

3.4.1 Анализ точности восстановления линейного тренда

Рассмотрим результаты исследований, проведенных в соответствии с описанными выше алгоритмами анализа точности восстановления модельного сигнала

№ 1 – линейного тренда (2.4), значения которого были заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. Результаты моделирования приведены в табл. 3.9. При реализации алгоритмов восстановления ДС № 4,5 использовались полиномы первой степени, размеры области локальной аппроксимации – 19 точек.

Таблица 3.9. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение параметра SER при восстановлении линейного тренда в соответствии с алгоритмами № 4, 5

Номер алгоритма восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	67.2	0.2	76.8	0.2
№ 4	79.1	0.7	88.0	1.4
№ 5	79.0	0.7	88.0	1.4

Из табл. 3.9 видно, что вне зависимости от ЗРСВ τ_i близкое друг к другу наибольшее среднее значение параметра SER имеют алгоритмы №4 и №5. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 11.9 дБ и на 11.2 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

3.4.2 Анализ точности восстановления полиномиального тренда

Рассмотрим результаты восстановления модельного сигнала №2 – полиномиального тренда (2.5), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. Результаты моделирования приведены в табл. 3.10. При реализации алгоритмов №4,5 использовались: полиномы первой степени, размеры областей локальной аппроксимации – 19 и 11 точек соответственно для равномерного и нормального ЗРСВ τ_i .

Из табл. 3.10 видно, что вне зависимости от ЗРСВ τ_i близкое друг к другу наибольшее среднее значение параметра SER имеют алгоритмы №4 и №5. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 10.8 дБ и на 8.2 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

Таблица 3.10. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение SER при восстановлении полиномиального тренда в соответствии с алгоритмами №4-5

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	СКО SER, равномерный ЗРСВ τ_i	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	СКО SER, нормальный ЗРСВ τ_i
Тривиальный	61.0	0.2	70.6	0.3
№ 4	71.8	0.7	78.8	0.8
№ 5	71.7	0.7	78.7	0.8

3.4.3 Анализ точности восстановления периодического сигнала

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 3 – периодического сигнала (2.7), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. В табл. 3.11 представлены средние значения SER, полученные при восстановлении сигнала № 3 с помощью метода сплайн интерполяции.

Таблица с результатами исследования точности восстановления сигнала № 3 с помощью метода адаптивных весов приведена в Приложении А, из которой можно сделать вывод, что для изученного ДС точность восстановления сигнала с помощью алгоритмов № 4, 5 оказывается ниже точности тривиального алгоритма.

Из табл. 3.11 видно, что для изученного дискретного сигнала при равномерном законе распределения случайной величины τ_i при восстановлении дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки, с помощью локальной аппроксимации по методу наименьших квадратов наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома четвертой степени и размере локальной области в 11 точек, соответственно, при нормальном законе распределения случайной величины τ_i – 9 точек. При использовании нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по методу наименьших квадратов, наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома четвертой степени и размере окна сглаживания 11 точек и 9 точек при равномерном и нормальном законе распределения случайной величины τ_i , соответственно.

Таблица 3.11 Среднее значение SER при восстановлении периодического сигнала в соответствии с алгоритмами № 4,5

Алгоритм восстановления	Тип сглаживающего фильтра / Степень аппроксимирующего полинома	Размер окна фильтра / локальной области	Равномерный ЗРСВ τ_i		Нормальный ЗРСВ τ_i	
			Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER	Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER
Тривиальный	–	–	16.5	0.3	25.9	1.1
№ 4	Метод скользящего среднего	3	16.6	0.7	18.8	0.3
		5	9.9	0.2	10.2	0.1
		7	5.1	0.1	5.3	0.02
		9	2.1	0.1	2.2	0.01
	МНК полиномом второй степени	3	16.5	0.6	26.2	0.7
		5	19.2	1.1	28.6	0.8
		7	19.6	1.1	24.7	0.5
		9	15.9	0.7	17.5	0.2
	МНК полиномом четвертой степени	5	16.5	0.6	26.2	0.7
		7	18.6	1.0	28.3	0.7
		9	19.9	1.2	29.4	0.9
		11	20.6	1.2	28.2	0.9
№ 5	Вторая	3	10.8	4.1	20.2	3.6
		5	18.9	0.9	25.9	0.6
		7	18.0	0.9	21.3	0.3
		9	14.7	0.5	15.9	0.2
	Третья	5	17.3	1.7	26.6	1.2
		7	19.5	1.1	25.2	0.6
		9	16.2	0.7	17.9	0.2
		11	11.3	0.3	11.8	0.1
	Четвертая	5	15.2	1.4	24.8	2.3
		7	18.6	0.9	28.4	0.7
		9	19.8	1.1	28.8	0.8
		11	20.4	1.1	26.5	0.8

При использовании нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание дискретного сигнала по методу скользящего среднего, наибольшее значение параметра SER достигается при размере окна сглаживания 3 точки, вне зависимости от вида закона распределения случайной величины τ_i . Отметим, что значение отношения мощности сигнала к мощности ошибки восстановления SER в последнем случае оказывается меньше соответствующего значения без использования данного вида фильтра. Следовательно, его использование в рассматриваемой задаче нецелесообразно. В то же время, использование нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по методу наименьших квадратов, в рассматриваемой задаче позволяет повысить точность восстановления дискретного сигнала.

Таким образом, при использовании метода сплайн интерполяции при равномерном законе распределения случайной величины τ_i наибольшие средние значения параметра SER у алгоритмов № 4 и № 5 оказываются близкими друг к другу. При нормальном законе распределения случайной величины τ_i наибольшее среднее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 4.

3.4.4 Анализ точности восстановления ЛЧМ-сигнала

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала №4 – сигнала с линейной частотной модуляцией (2.9) значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$. представленные в табл. 3.12.

Из табл. 3.12 видно, что наибольшее значение параметра SER при аппроксимации дискретного сигнала в соответствии с методом наименьших квадратов достигается при использовании полинома четвертой степени и локальной области размером 11 и 9 точек при равномерном и нормальном законе распределения случайной величины τ_i , соответственно.

В случае использования нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по МНК при равномерном законе распределения случайной величины τ_i наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома четвертой степени, и размере окна сглаживания, равного 11, при нормальном законе распределения случайной величины τ_i – 9. При использовании нерекурсивного

цифрового фильтра, реализующего сглаживание значений дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно значениями координат ее узлов, по методу скользящего среднего, вне зависимости от вида закона распределения случайной величины τ_i , наибольшее значение параметра SER достигается при размере окна сглаживания 3 точки. Отметим, что значение SER в последнем случае оказывается меньше соответствующего значения, получаемого без использования данного типа нерекурсивного цифрового фильтра. Следовательно, его использование в рассматриваемой задаче нецелесообразно. В то же время, использование в рассматриваемой задаче нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по методу наименьших квадратов, позволяет повысить точность восстановления дискретного сигнала.

Таким образом, вне зависимости от закона распределения случайной величины τ_i , наибольшее среднее значение параметра SER имеет алгоритм № 5. Средние значения параметра SER при нормальном законе распределения случайной величины τ_i оказываются выше, чем при равномерном ЗРСВ τ_i .

3.4.5 Анализ точности восстановления сигнала с амплитудной модуляцией

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 5 – амплитудно-модулированного сигнала (2.11), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$, представленные в табл. 3.13.

Из табл. 3.13 видно, что при использовании нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по методу наименьших квадратов, наибольшее значение параметра SER достигается:

- для случая равномерного закона распределения случайной величины τ_i при использовании полинома шестой степени и размере окна сглаживания 11 точек;
- для случая нормального закона распределения случайной величины τ_i – полиномов пятой и шестой степени при размере окна сглаживания в 7 и 9 точек, соответственно.

Таблица 3.12 Среднее значение SER при восстановлении ЛЧМ-сигнала в соответствии с алгоритмами № 4,5

Алгоритм восстановления	Тип сглаживающего фильтра / Степень аппроксимирующего полинома	Размер окна фильтра / локальной области	Равномерный ЗРСВ τ_i		Нормальный ЗРСВ τ_i	
			Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER	Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER
Тривиальный	–	–	18.2	0.6	26.7	0.7
№ 4	Метод скользящего среднего	3	17.7	0.9	19.8	0.3
		5	11.7	0.4	12.1	0.1
		7	7.1	0.2	7.2	0.1
		9	3.8	0.1	3.9	0.1
	МНК полиномом второй степени	3	18.4	0.6	26.6	0.8
		5	20.4	1.1	27.5	0.8
		7	20.5	1.3	25.3	0.6
		9	18.2	1.0	20.2	0.3
	МНК полиномом четвертой степени	5	18.4	0.6	26.6	0.8
		7	20.0	0.9	27.7	0.8
		9	20.9	1.2	28.1	0.9
		11	21.3	1.4	27.6	0.8
№ 5	Вторая	3	15.2	2.9	19.8	3.5
		5	19.5	1.4	24.1	1.8
		7	20.1	1.2	23.7	0.6
		9	17.5	0.8	19.0	0.4
	Третья	5	18.4	1.6	26.3	1.6
		7	21.0	1.3	28.2	0.9
		9	19.3	1.2	22.1	0.4
		11	15.1	0.6	16.0	0.2
	Четвертая	5	14.3	2.7	23.2	4.3
		7	20.0	0.9	29.0	0.9
		9	21.6	1.2	29.6	1.0
		11	21.7	1.5	29.1	1.2

Таблица 3.13 Среднее значение SER при восстановлении АМ-сигнала в соответствии с алгоритмами №4,5

Алгоритм восстановления	Тип сглаживающего фильтра / Степень аппроксимирующего полинома	Размер окна фильтра / локальной области	Равномерный ЗРСВ τ_i		Нормальный ЗРСВ τ_i	
			Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER	Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER
Тривиальный	–	–	25.4	0.7	35.2	1.3
№ 4	МНК полиномом третьей степени	5	26.9	0.7	34.0	0.7
		7	22.9	0.3	24.6	0.1
		9	17.6	0.1	18.0	0.1
		11	14.2	0.1	14.3	0.1
	МНК полиномом пятой степени	7	27.2	0.8	36.8	1.3
		9	26.8	0.7	32.7	0.6
		11	23.1	0.3	24.9	0.1
		13	18.4	0.1	18.9	0.1
	МНК полиномом шестой степени	7	25.4	0.7	35.2	1.4
		9	27.0	0.8	36.8	1.4
		11	27.6	0.8	36.6	1.1
		13	26.7	0.7	31.7	0.5
№ 5	Третья	5	26.7	0.7	34.7	0.9
		7	23.5	0.4	25.5	0.2
		9	18.0	0.1	18.5	0.1
		11	14.5	0.1	14.6	0.1
	Пятая	7	26.8	0.7	36.5	1.3
		9	27.0	0.7	33.5	0.7
		11	23.5	0.3	25.6	0.2
		13	18.8	0.1	19.3	0.1
	Шестая	7	25.4	0.7	35.2	1.4
		9	27.0	0.7	36.7	1.4
		11	27.3	0.8	34.9	0.8
		13	25.8	0.6	29.5	0.3

Для изученного дискретного сигнала при равномерном законе распределения случайной величины τ_i при восстановлении дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки, с помощью локальной аппроксимации по методу наименьших квадратов наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома шестой степени и размере локальной области в 11 точек, соответственно, при нормальном законе распределения случайной величины τ_i – 9 точек.

При использовании нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание дискретного сигнала по методу МНК полиномом третьей степени, значение параметра SER превышает значение тривиального алгоритма только в случае равномерного ЗРСВ τ_i при размере окна сглаживания, равном 5. Значение SER при нормальном ЗРСВ τ_i оказывается меньше соответствующего значения без использования данного вида нерекурсивного цифрового фильтра, реализующего сглаживание по МНК полиномом третьей степени.

Таким образом, при восстановлении данного вида сигнала наибольшие средние значения параметра SER оказываются близкими друг к другу у алгоритмов №4,5 вне зависимости от закона распределения случайной величины τ_i .

3.4.6 Анализ точности восстановления сигнала со скачкообразным изменением частоты

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления модельного сигнала № 5 – сигнала со скачкообразным изменением частоты (2.13), значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (2.1), $|\tau_i|/T = 0.5$, представленные в табл. 3.14.

Из табл. 3.14 видно, что для изученного ДС, при его аппроксимации в соответствии с МНК, наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома четвертой степени при размере локальной области в 11 точек и 7 точек при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i . В случае использования НЦФ, реализующего сглаживание по МНК, наибольшее значение параметра SER достигается при использовании полинома четвертой степени и размере окна сглаживания 11 точек и 7 точек при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i .

Таблица 3.14 Среднее значение SER при восстановлении сигнала с СИЧ в соответствии с алгоритмами № 4, 5

Алгоритм восстановления	Тип сглаживающего фильтра / Степень аппроксимирующего полинома	Размер окна фильтра / локальной области	Равномерный ЗРСВ τ_i		Нормальный ЗРСВ τ_i	
			Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER	Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER
Тривиальный	–	–	17.9	0.6	26.5	0.7
№ 4	Метод скользящего среднего	3	16.8	0.1	19.0	0.1
		5	11.0	0.1	11.4	0.1
		7	6.5	0.1	6.6	0.1
		9	3.6	0.1	3.6	0.1
	МНК полиномом второй степени	3	17.6	0.3	26.6	0.2
		5	19.3	0.5	27.1	0.5
		7	19.2	0.3	23.6	0.3
		9	16.3	0.1	17.9	0.1
	МНК полиномом четвертой степени	5	17.6	0.3	26.6	0.2
		7	19.0	0.6	27.7	0.5
		9	19.9	0.5	27.5	0.5
		11	20.1	0.4	25.8	0.5
№ 5	Вторая	3	8.4	0.2	23.4	2.8
		5	19.1	0.7	26.3	0.9
		7	19.0	0.4	22.6	0.2
		9	16.0	0.3	17.4	0.1
	Третья	5	17.8	1.8	26.2	2.5
		7	19.9	0.4	26.4	0.5
		9	17.2	0.2	19.5	0.1
		11	12.8	0.1	13.5	0.1
	Четвертая	5	11.9	2.9	25.3	3.7
		7	19.0	0.6	29.2	0.6
		9	20.2	0.5	29.1	0.8
		11	20.5	0.5	26.8	0.6

При использовании фильтра, реализующего сглаживание ДС по методу скользящего среднего, наибольшее значение параметра SER достигается при размере окна сглаживания, равном 3 точки, вне зависимости от вида ЗРСВ τ_i . Отметим, что значение SER в последнем случае оказывается меньше соответствующего значения, полученного без использования данного вида НЦФ. Следовательно, его использование в рассматриваемой задаче нецелесообразно. В то же время, использование НЦФ, реализующего сглаживание по МНК, в рассматриваемой задаче позволяет повысить точность восстановления ДС.

Вне зависимости от ЗРСВ τ_i наибольшее среднее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 5. Кроме того у алгоритма № 5 средние значения параметра SER при нормальном ЗРСВ τ_i оказываются выше, чем при равномерном ЗРСВ τ_i .

Таким образом, анализ результатов исследования на основе статистического моделирования алгоритмов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов, показывает, что из всех рассматриваемых алгоритмов наибольшую точность восстановления линейного тренда, полиномиального тренда, периодического сигнала, ЛЧМ-сигнала, АМ-сигнала и СИЧ-сигнала имеют алгоритмы № 3, 4 и 5 вне зависимости от ЗРСВ τ_i . При этом необходимо отметить, что использование алгоритмов № 4 и № 5 для иных типов сигналов требует подбора параметров (размера окна сглаживания, вида НЦФ или степени аппроксимирующего полинома), а потому для каждого конкретного сигнала проведения аналогичных исследований.

3.5 Выводы по главе

1. Разработан комплекс алгоритмов восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, состоящий из 5 алгоритмов, которые не требуют решения каких-либо оптимизационных задач и знания априорной информации о спектре сигнала.

2. Проведено исследование точности восстановления ДС, заданных в узлах НВС, с помощью разработанных алгоритмов, результаты которого позволяют сделать следующие выводы:

2.1. При восстановлении линейного тренда вне зависимости от ЗРСВ τ_i близкое друг к другу наибольшее среднее значение параметра SER (Signal-to-Error Ratio) имеют

алгоритм № 4, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра и алгоритм №5, основанный на локальной аппроксимации сигнала по МНК. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 11.9 дБ и на 11.2 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

2.2. При восстановлении полиномиального тренда вне зависимости от ЗРСВ τ_i близкое друг к другу наибольшее среднее значение параметра SER также имеют алгоритмы №4 и №5. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 10.8 дБ и на 8.2 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

2.3. При восстановлении периодического сигнала наибольшее среднее значение параметра SER для изученных алгоритмов при равномерном ЗРСВ τ_i оказывается при интерполяции сигнала методом адаптивных весов алгоритмом №2, при нормальном ЗРСВ τ_i – алгоритмом № 3. Применение метода Марvasti в данных алгоритмах не повышает точность восстановления по сравнению с тривиальным алгоритмом. Восстановление ДС с помощью метода сплайн интерполяции имеет меньшую точность, однако является более практичным и универсальным, по сравнению с методами адаптивных весов и Марvasti. Как видно, при использовании сплайн интерполяции рассматриваемые алгоритмы восстановления имеют более высокую точность по сравнению с тривиальным алгоритмом. При равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма № 4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 4.1 дБ и на 3.5 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

2.4. При восстановлении ЛЧМ-сигнала вне зависимости от ЗРСВ τ_i наибольшее среднее значение параметра SER оказывается у алгоритма №5. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма №5 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 3.5 дБ и на 2.9 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

2.5. При восстановлении АМ-сигнала вне зависимости от ЗРСВ τ_i наибольшее среднее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 3. Так при равномерном ЗРСВ τ_i среднее значение SER алгоритма № 3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 4.3 дБ и на 2.2 дБ при нормальном ЗРСВ τ_i .

2.6. При восстановлении СИЧ-сигнала вне зависимости от ЗРСВ τ_i близкое друг к другу наибольшее среднее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 3. Среднее значение SER алгоритма № 3 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 4.8 дБ и на 3.7 дБ при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i , соответственно.

Глава 4 Анализ результатов точности алгоритмов восстановления дискретных сигналов при их использовании в реальных цифровых системах

В данной главе разработанные в Главе 3 алгоритмы восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными точно значениями координат ее узлов, применяются для восстановления ДС, получаемых на выходе реально существующих технических устройств – АЦП, для которых проблема восстановления данных сигналов с учетом джиттера оказывается ключевой.

Здесь мы используем математические модели соответствующих АЦП, учитывающие как наличие джиттера при дискретизации по времени, так и погрешность квантования сигнала по амплитуде. Для оценки точности восстановления исходного сигнала используется отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления SER (2.3).

Отметим, что в качестве тестового сигнала для анализа работы АЦП обычно используют синусоидальный сигнал (см. например [168,144,65,104]). Его выбор обусловлен тем, что источники соответствующего сигнала широко распространены. Кроме того, относительно легко установить качество синусоидального сигнала (например, используя анализатор спектра). Кроме того, стандарт международной ассоциации Института инженеров электротехники и электроники (Institute of Electrical and Electronics Engineers, IEEE) [89] рекомендует использовать для тестирования АЦП сигнал именно данного типа. В этой связи в проведенных исследованиях мы использовали модельный сигнал вида

$$x(t) = \sin(2\pi f_c t). \quad (4.1)$$

Кроме того в проведенных экспериментах учитывался внутренний шум АЦП, обусловленный тепловым шумом электрических цепей АЦП, который присутствует в любой системе дискретизацией данных и вместе с шумом квантования накладывает фундаментальное ограничение на точностные характеристики любого АЦП. При моделировании влияния теплового шума на точность квантования аналогового сигнала по амплитуде можно считать, что на вход АЦП подается смесь сигнала и шума, энергия которого определяется энергией тепловых шумов АЦП [40].

В ходе экспериментов, принимая во внимание, что реальные АЦП имеют конечную разрядность, учитывались также шум квантования по амплитуде и дифференциальная нелинейность переходной характеристики АЦП (Differential Non Linearity, *DNL*). Напомним, что идеальный АЦП меняет значение цифрового сигнала, при условии, что значение аналогового входного сигнала изменилось на величину, равную значению младшего значащего разряда (МЗР). Физический смысл *DNL* – отклонение ширины кода от идеальной ширины кода МЗР, равного единице. (У идеального преобразователя данных дифференциальная нелинейность равна нулю.) Из-за наличия дифференциальной нелинейности возрастает усредненная ошибка квантования, а, следовательно, и шум квантования. В [90,82,100] показано, что *DNL* можно рассматривать, как аддитивный шум, добавляющийся к шуму квантования входного сигнала по амплитуде.

Для повышения достоверности оценок точности восстановления сигналов в соответствии с описанными выше алгоритмами был использован метод Монте-Карло.

Блок-схема алгоритма проведения исследований точности восстановления ДС, получаемых на выходе реальных АЦП, представлена на рис. 4.1. Приведем описание и назначение каждого блока.

Блок 1 – вычисление точных значений сигнала в узлах временной сетки (2.2): $s_{m_1} = f(m_1 T)$. Данные значения используются далее для вычисления погрешности восстановления ДС.

Блок 2 – инициализация счетчика цикла шагов метода Монте-Карло: $j = \overline{1, N}$, где N – число статистических испытаний.

Блок 3 – формирование неравномерной временной сетки с заданным значением джиттера в соответствии с характеристиками и типом АЦП. Вычисление значений дискретного сигнала в узлах неравномерной временной сетки.

Блок 4 – вычисление значений смеси ДС $\tilde{x}(t_i)$ и шума:

$$x(t_i) = \tilde{x}(t_i) + \Delta \cdot n_i, \quad (4.2)$$

где n_i – гауссова случайная последовательность;

Δ – СКО теплового шума АЦП.

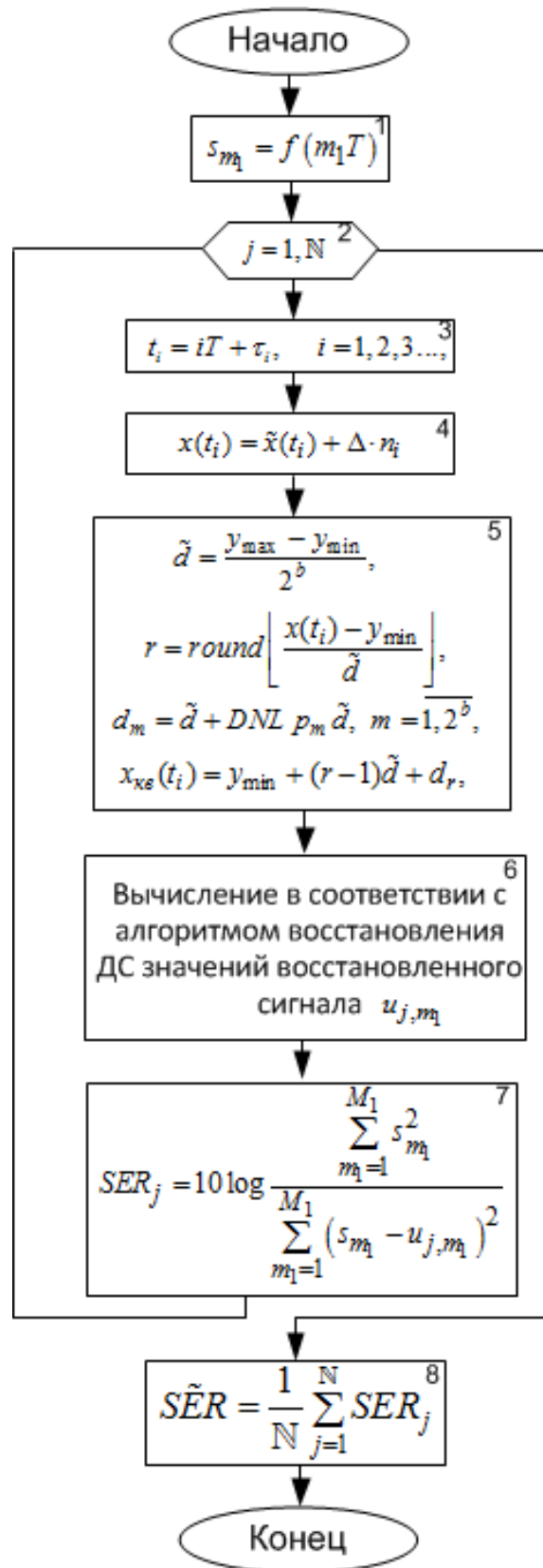


Рис. 4.1 Блок-схема моделирования оценки точности восстановления ДС

Блок 5 – квантование по амплитуде: отнесение текущих значений сигнала к разрешенным уровням квантования, следующих с равномерным шагом Δ . Число уровней определяется разрядностью АЦП. Квантование моделируется с учетом характеристик дифференциальной нелинейности выбранного АЦП. В этом блоке приняты следующие обозначения: $\lfloor \cdot \rfloor$ – символ округления; d_m – шаг квантования с учетом дифференциальной нелинейности; b – разрядность АЦП; $[y_{\min}, y_{\max}]$ – динамический диапазон АЦП; p_m – случайная последовательность, генерируемая в соответствии с равномерным законом распределения на интервале $(-1,1)$; DNL – значение дифференциальной нелинейности, измеряемое в долях МЗР.

Блок 6 – вычисление с помощью каждого из описанных выше алгоритмов восстановления ДС значений восстановленного сигнала u_{j,m_1} .

Блок 7 – вычисление в соответствии с (2.3) погрешности восстановления сигнала на j -ом шаге метода Монте-Карло SER_j .

Блок 8 – вычисление усредненной по ансамблю реализаций погрешности восстановления ДС:

$$\overline{SER} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N SER_j.$$

4.1 Анализ результатов точности восстановления ДС, образованного одиночным высокоскоростным 8 битным АЦП на основе КМОП-технологии 0.18 мкм

На выходе высокоскоростных АЦП, вследствие существования джиттера тактовой частоты задающего генератора, получают ДС, заданные в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат узлов. Рассмотрим результаты исследования точности восстановления ДС, получаемого на выходе высокоскоростного 8 битного АЦП, разработанного по технологии КМОП 0.18 мкм [130], характеристики которого представлены в табл. 4.1.

Таблица. 4.1 Основные параметры АЦП на основе КМОП-технологии 0.18 мкм

Частота дискретизации	20 ГГц	
Разрядность	8 бит	
Ширина полосы пропускания	6.6 ГГц	
Точность $f_{вх} = 500$ МГц $f_{вх} = 6$ ГГц	Число эффективных разрядов 6.5 Число эффективных разрядов 4.6	
Джиттер	0.7 пс	
Дифференциальная нелинейность	± 0.3 МЗР	
Диапазон входного сигнала	0.25 В	
	Буферная микросхема	Микросхема АЦП
Входная емкость	0.2 пФ	4 пФ
Энергопотребление	1 Вт	9 Вт
Размеры микросхемы	1.2x2.6 мм	14x14мм
Технология	40 ГГц SiGe БиКМОП	0.18 мкм КМОП

График зависимости эффективного числа бит АЦП от частоты входного сигнала представлен на рис. 4.2.

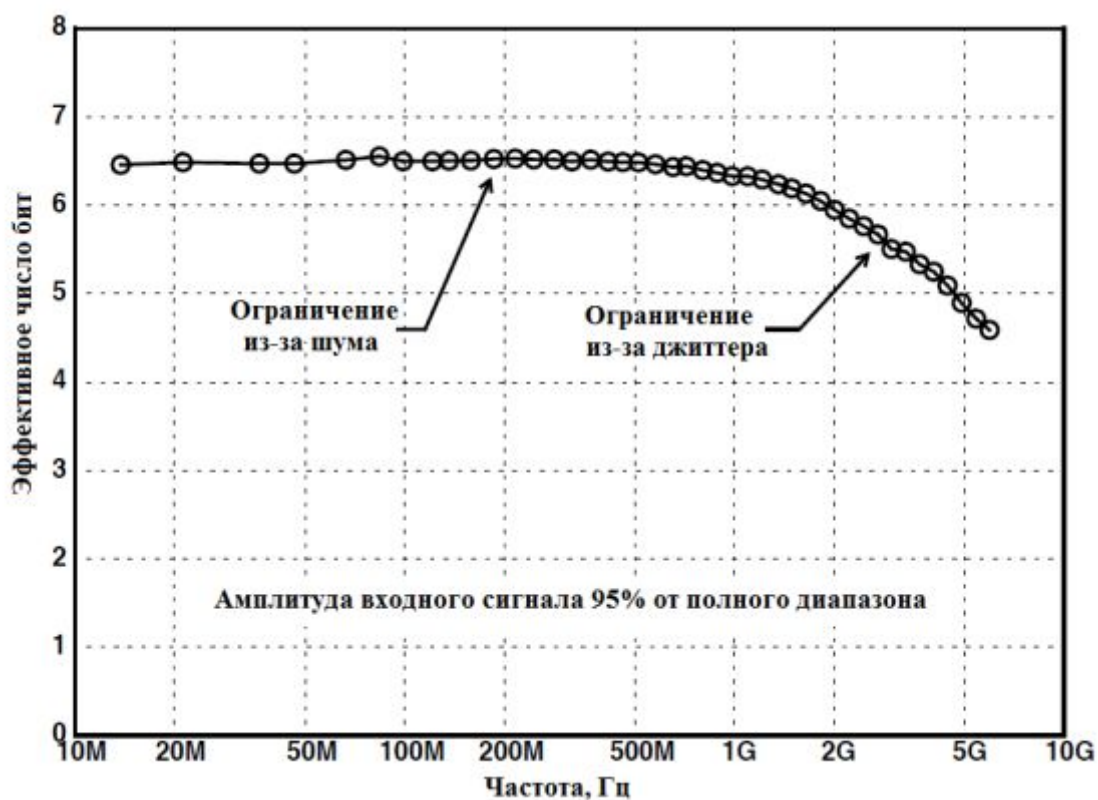


Рис. 4.2 График зависимости эффективного числа бит АЦП от частоты входного сигнала [130]

Из рис. 4.2. видно, что в диапазоне частот входного сигнала [15;500] МГц значение эффективных бит АЦП, зависящее, главным образом, от энергии тепловых шумов элементов электрических цепей АЦП, не превосходит 6.5 бит. В диапазоне частот входного сигнала [500,6000] МГц значение эффективных бит АЦП, зависящих в первую очередь от энергии джиттера, оказывается монотонно убывающей функцией частоты, значения которой изменяются в диапазоне [6.5; 4.6]. В результате воздействия тепловых шумов и джиттера, ДС, получаемый на выходе изучаемого АЦП, будет задан в узлах НВС

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.3)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина (джиттер), $\tau_i \in]-T/2, T/2[$, точные значения которой неизвестны, $t_i > t_{i-1}$.

Рассмотрим результаты анализа точности восстановления дискретного сигнала для следующих параметров АЦП:

1. Частота входного сигнала $f_c = 2$ ГГц, соответственно, как и в экспериментах Главы 3, безразмерная частота дискретизации $\hat{f} = 0.1$.

2. Джиттер τ_i – случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.7 \cdot 10^{-12}, 0.7 \cdot 10^{-12}]$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с

нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{0.14 \cdot 10^{-12}}{3\sqrt{12}}\right)$. Выбор данных параметров

законов распределения обеспечивает выполнение условия на величину джиттера 0.7 пс (см. табл. 4.1).

3. Для получения статистически устойчивых результатов был использован метод Монте-Карло, число шагов которого равнялось 100, число узлов равномерной сетки, в узлах которой восстанавливались значения ДС, $M = 1980$, число отсчетов исходного сигнала – 1000. Данное количество отсчетов выбрано с целью показать, что рассматриваемые алгоритмы легко работают с ДС с большим числом отсчетов.

Максимальные значения параметра SER, полученные в результате восстановления ДС, в соответствии с алгоритмами № 1–5 и тривиальным алгоритмом представлены в табл. 4.2. Результаты данного исследования для различных степеней аппроксимирующего полинома и размеров окон приведены в Приложении Б.

Таблица 4.2 – Значения параметра SER при восстановлении ДС, заданного на временной сетке (4.3), в соответствии с алгоритмами № 1-5

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	Параметры алгоритма, равномерный ЗРСВ τ_i		Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	Параметры алгоритма, нормальный ЗРСВ τ_i	
		Степень полинома	Размер окна		Степень полинома	Размер окна
Тривиальный	44.6±0.2	–	–	47.2±0.3	–	–
№ 1	44.6±0.2	–	–	47.2±0.3	–	–
№ 2	44.7±0.2	–	–	47.2±0.3	–	–
№ 3	46.2±0.2	5	7	48.3±0.3	5	7
№ 4	47.7±0.4	11	19	51.2±0.3	11	19
№ 5	45.7±0.2	5	7	49.1±0.2	5	7

Из табл. 4.2 видно, что алгоритмы № 3–5 имеют значение параметра SER, превосходящее точность тривиального алгоритма, и, следовательно, обеспечивают более высокую точность восстановления ДС, получаемого на выходе изучаемого АЦП. Из алгоритмов № 3–5 наибольшее среднее значение SER имеет алгоритм № 4, которое превышает аналогичную величину тривиального алгоритма на 3.1 дБ и 4 дБ при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i , соответственно. Отметим, что алгоритм 2 в данном примере не обеспечивает повышение точности восстановления, но, как будет показано далее, его эффективно применять в случае большего значения джиттера τ_i , чем в приведенном эксперименте.

Графики зависимостей величины SER от безразмерной частоты дискретизации для тривиального алгоритма и алгоритмов № 1-5 для равномерного и нормального ЗРСВ τ_i представлены на рис. 4.3, 4.4, соответственно. Здесь при восстановлении периодического ДС, заданного в узлах НВС, с помощью алгоритмов № 4, 5 были использованы значения параметров, представленные в табл. 4.2.

Из рис. 4.3, 4.4 видно, что на исследованном интервале значений безразмерной частоты \hat{f} зависимость SER оказывается монотонно убывающей функцией \hat{f} . При этом наибольшее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 4. Алгоритмы № 1,2 и тривиальный алгоритм имеют близкие значения параметра SER (кривые 1,2,6) при всех значениях \hat{f} .

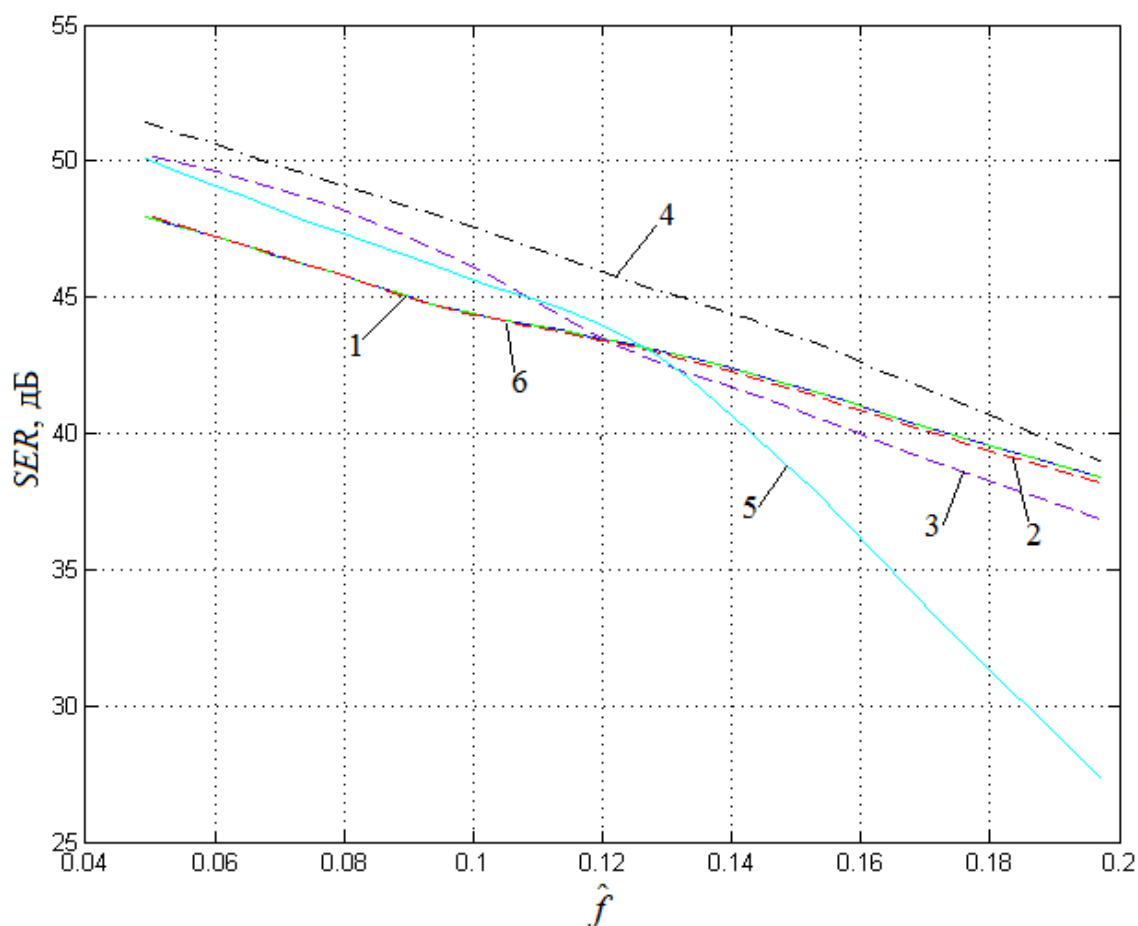


Рис. 4.3 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при равномерном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы № 1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

Результаты исследования точности восстановления ДС, заданного в узлах НВС, от относительного размаха джиттера $|\tau_i|/T$ представлены на рис. 4.5, 4.6. Здесь при восстановлении ДС, заданного в узлах НВС, с помощью алгоритмов № 4, 5 были использованы значения параметров, представленные в табл. 4.2.

Из рис. 4.5, 4.6 видно, что при увеличении размаха джиттера точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС, при использовании каждого из алгоритмов, описанных в Главе 3, монотонно убывает. При этом во всем исследованном диапазоне значений размаха джиттера $|\tau_i|/T$ точность восстановления периодического дискретного сигнала, заданного в узлах НВС, оказывается выше при использовании алгоритмов № 4 и № 5.

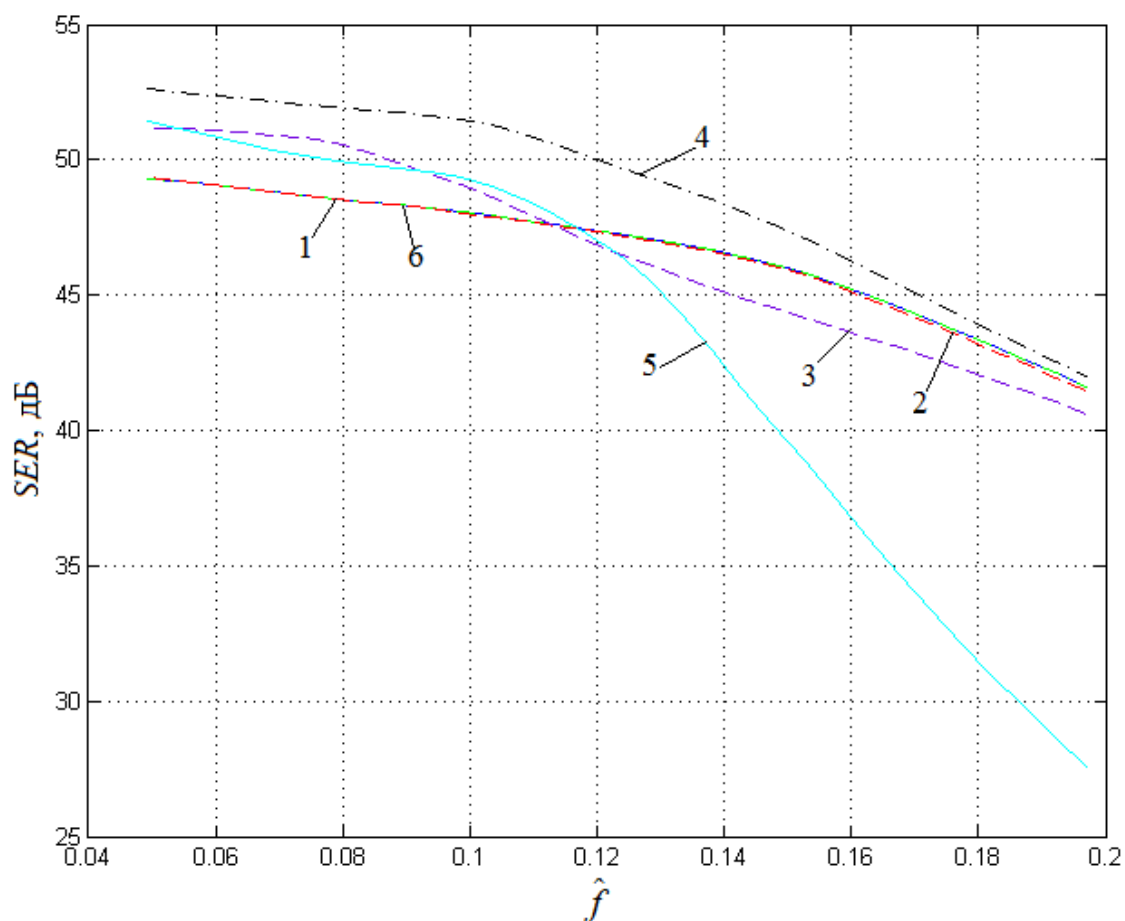


Рис. 4.4 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при нормальном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы № 1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

Таким образом, результаты проведенного исследования алгоритмов восстановления ДС, заданного в узлах НВС, с неизвестными значениями координат узлов, позволяют сделать вывод о том, что из изученных алгоритмов наибольшую точность восстановления ДС имеет алгоритм № 4, который целесообразно использовать на практике при восстановлении ДС, регистрируемых на выходе 8-битного высокоскоростного АЦП.

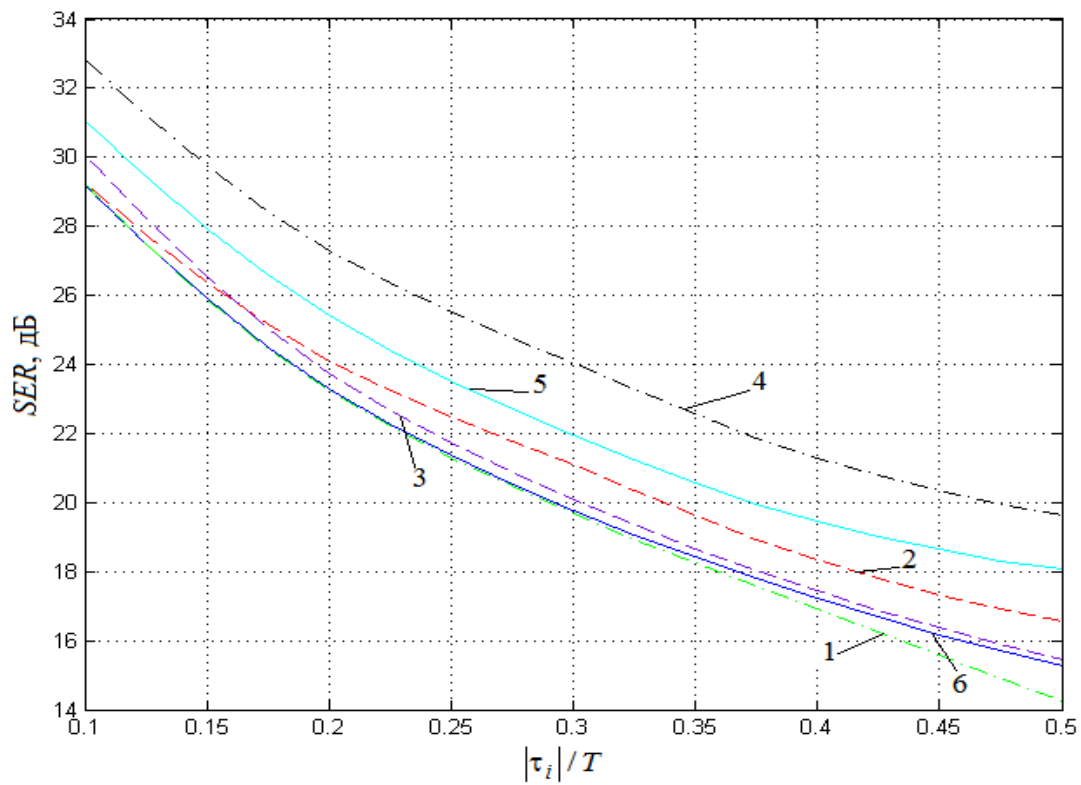


Рис. 4.5 Графики зависимости величины SER от $|\tau_i|/T$ при равномерном ЗРСВ τ_i : 1-5 – алгоритмы № 1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

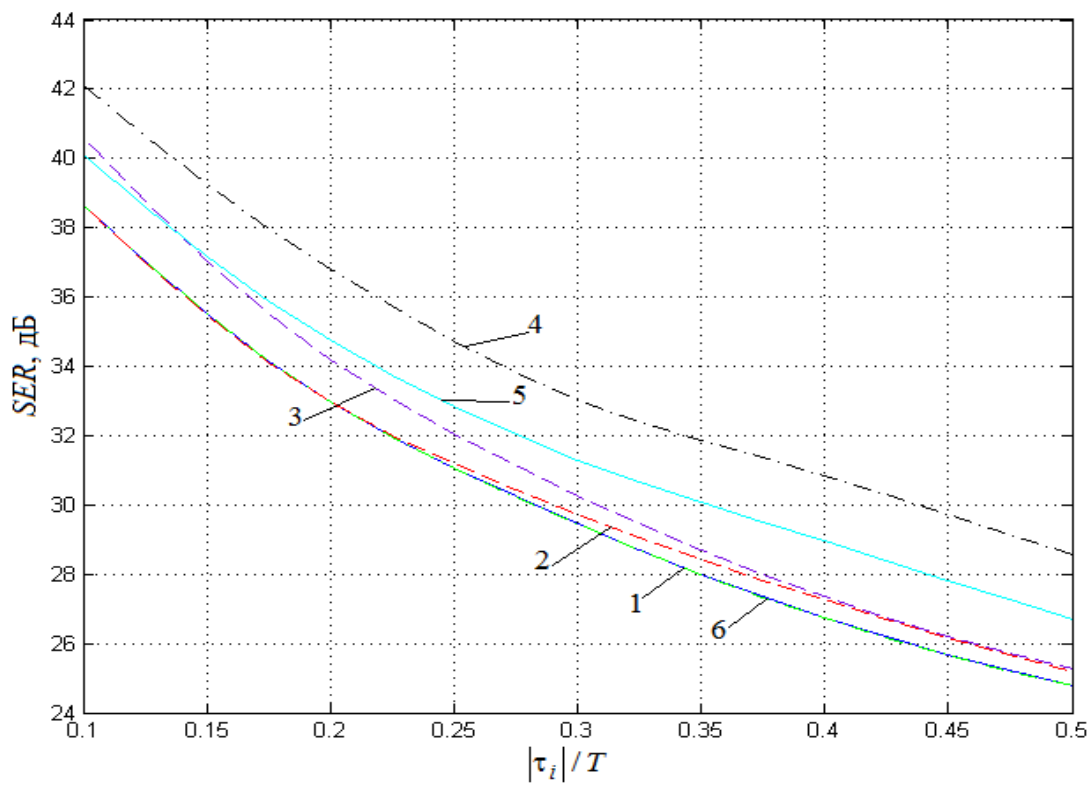


Рис. 4.6 Графики зависимости величины SER от $|\tau_i|/T$ при нормальном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы № 1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

4.2 Анализ результатов точности восстановления ДС, получаемого на выходе системы 8 параллельных 5-ти битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм

Проведем анализ точности восстановления ДС, получаемого на выходе цифровой измерительной системы, состоящей из 8 параллельных 5 битных АЦП, работающих с разделением во времени [66]. Основные характеристики данной цифровой измерительной системы АЦП представлены в табл. 4.3.

Таблица.4.3 Основные параметры АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм

Частота дискретизации	12 ГГц
Разрядность	5 бит
Число параллельных каналов	8
Отношение сигнал/(шум+искажения) (SNDR): $f_{\text{вх}} = 10$ МГц $f_{\text{вх}} = 6$ ГГц	27.5 дБ 25.1 дБ
Джиттер	0.6 пс
Дифференциальная нелинейность	$\pm 0.5 \text{ МЗР}$
Диапазон входного сигнала	0.59 В
Входная емкость	1.1 пФ
Рабочая площадь	0.44 мм ²
Энергопотребление	81 мВт
Технология	65 нм КМОП

В рассматриваемом случае восстанавливаемый ДС, представляет собой ДС, заданный в узлах неравномерной временной сетки

$$t_{i,k} = \delta_k + iKT, \quad \delta_k = kT + \tau_k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{1, K} \quad (4.4)$$

где K – число параллельных каналов;

T – период дискретизации;

τ_k – случайная величина (джиттер), $\tau_k \in]-0.5T; 0.5T[$.

В качестве тестового сигнала был использован ДС, вычисляемый в соответствии с (4.1) в узлах ВС (4.3). При этом использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.6 \cdot 10^{-12}, 0.6 \cdot 10^{-12}]$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{0.12 \cdot 10^{-12}}{3\sqrt{12}}\right)$, соответственно, реальное значение джиттера не превосходило 0.6 пс. Частота входного

сигнала $f_c = 1.2$ ГГц, соответственно, безразмерная частота дискретизации $\hat{f} = 0.1$. Для получения статистически устойчивых результатов был использован метод Монте-Карло, число шагов которого равнялось 100, число узлов РВС, в узлах которой восстанавливались значения ДС, $M = 1900$, число отсчетов исходного сигнала – 960. Данное количество отсчетов, как и в предыдущем разделе, было выбрано с целью подтверждения работоспособности изучаемых алгоритмов восстановления ДС, заданных большим числом отсчетов.

Результаты исследования точности восстановления ДС, в соответствии с алгоритмами №1-5, приведены в табл. 4.4. Данные результаты для различных степеней аппроксимирующего полинома и размеров окон приведены в Приложении Б.

Таблица 4.4 – Результаты восстановления ДС, заданного на временной сетке (4.4), в соответствии с алгоритмами №1-5

Алгоритм восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗРСВ τ_i	Параметры алгоритма, равномерный ЗРСВ τ_i		Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗРСВ τ_i	Параметры алгоритма, нормальный ЗРСВ τ_i	
		Степень полинома	Размер окна		Степень полинома	Размер окна
Тривиальный	33.8±2.5	–	–	33.8±2.4	–	–
№ 1	33.8±2.5	–	–	33.8±2.3	–	–
№ 2	34.2±2.6	–	–	34.2±3.1	–	–
№ 3	35.5±2.8	5	9	35.0±3.5	5	9
№ 4	39.1±3.5	9	19	39.8±4.0	9	19
№ 5	38.0±3.4	5	9	37.8±3.8	5	9

Из табл. 4.4 видно, что из всех изученных алгоритмов восстановления дискретного сигнала, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными точно координатами ее узлов, наибольшее среднее значение SER имеет алгоритм № 4. Среднее значение SER у алгоритма № 4 превышает соответствующее значение тривиального алгоритма на 5.3 дБ и на 6.0 дБ при равномерном и нормальном законе распределения случайной величины τ_i , соответственно.

Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации \hat{f} для каждого алгоритма при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i приведены, соответственно рис. 4.7, 4.8.

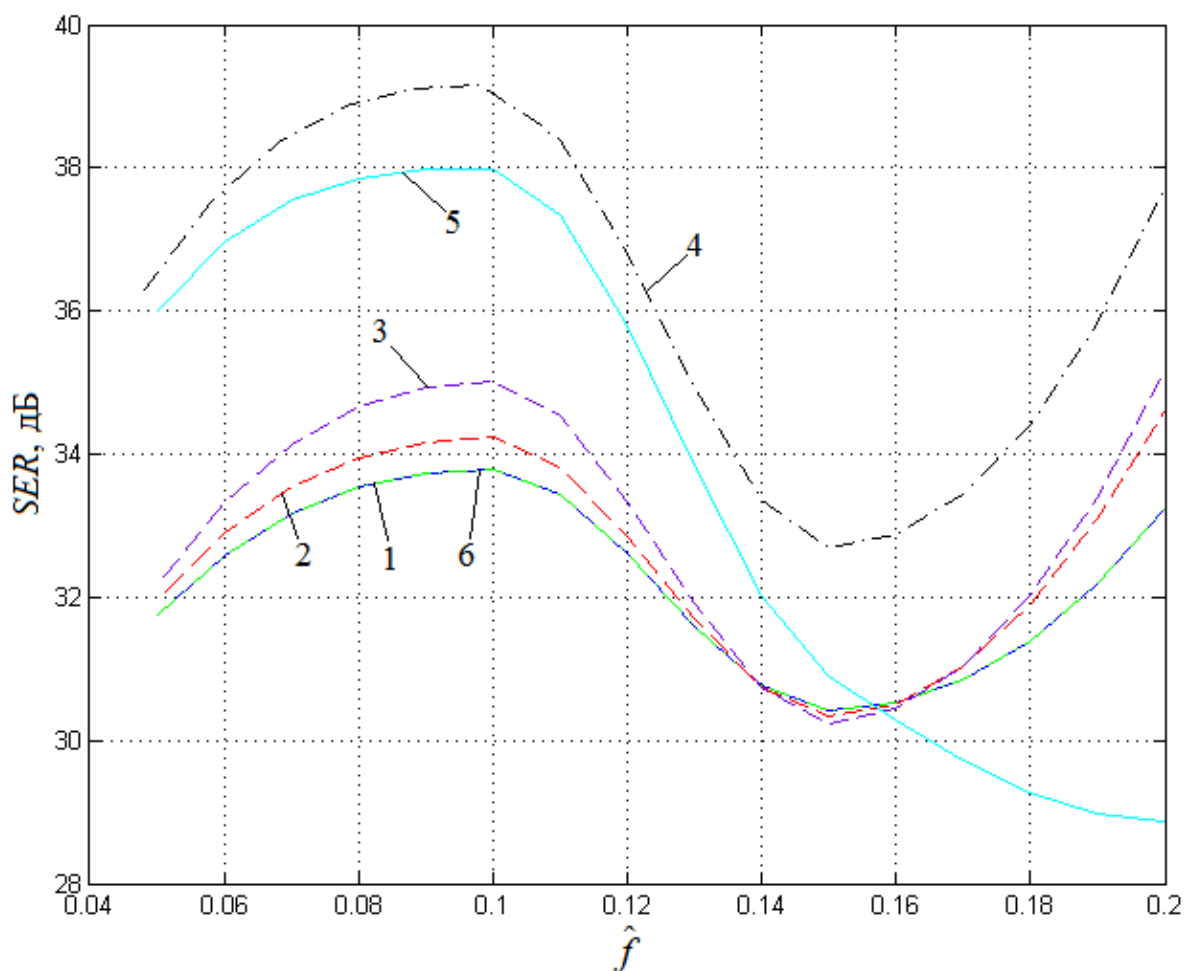


Рис. 4.7 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при равномерном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы № 1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Из рис. 4.7, 4.8 видно, что зависимости величины SER от безразмерной частоты ДС \hat{f} на интервале (0.05;0.2) для всех алгоритмов оказываются немонотонными. Они достигают максимального значения при $\hat{f} = 0.1$ и минимального значения $\hat{f} = 0.15$. Наибольшее значение параметра SER вне зависимости от значения параметра \hat{f} оказывается у алгоритма № 4.

Для объяснения причин обнаруженной особенности зависимости SER от безразмерной частоты ДС \hat{f} были вычислены значения зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при равномерном ЗРСВ τ_i , в предположении, что шум квантования ДС по амплитуде равен нулю (рис. 4.9, 4.10), а также зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации в предположении, что $\tau_i = 0$ (рис. 4.11, 4.12).

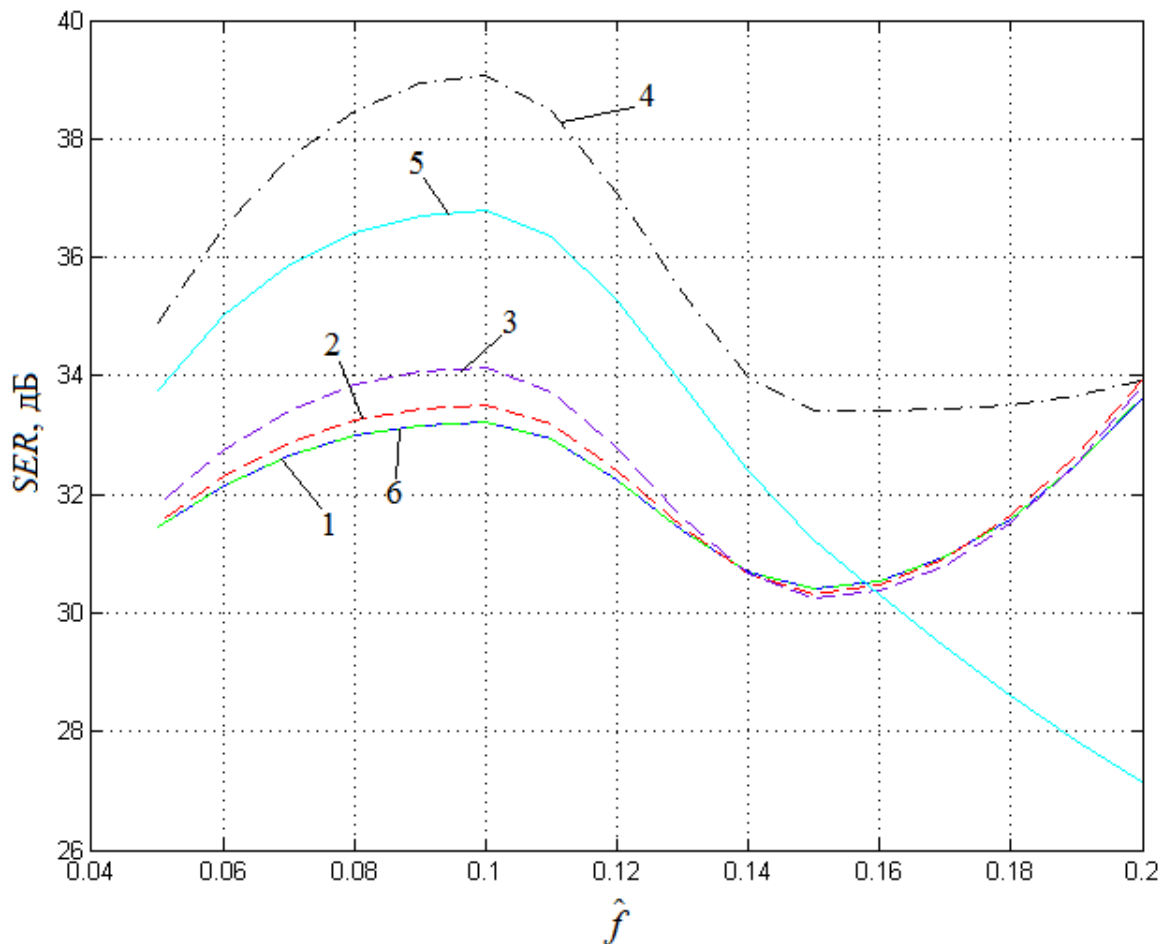


Рис. 4.8 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при нормальном ЗРСВ τ_i : 1-5 – алгоритмы №1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Из рисунков 4.9, 4.10 видно, что на исследованном интервале значений безразмерной частоты \hat{f} , в случае, когда не учитывается погрешность квантования сигнала по амплитуде, зависимость SER оказывается монотонно убывающей функцией \hat{f} . Данный результат вполне ожидаем, т.к. увеличение безразмерной частоты дискретизации эквивалентно увеличению расстояния между соседними узлами интерполяции и, соответственно, уменьшению числа узлов интерполяции на временном интервале, что, в свою очередь, приводит увеличению погрешности интерполяции.

В связи с тем, что без учета шума квантования ДС по амплитуде зависимости параметра SER от безразмерной частоты \hat{f} являются монотонно убывающими функциями, можно предположить, что их немонотонность (см. рис. 4.7, 4.8) обусловлена шумом квантования сигнала по амплитуде и наличием *DNL*.

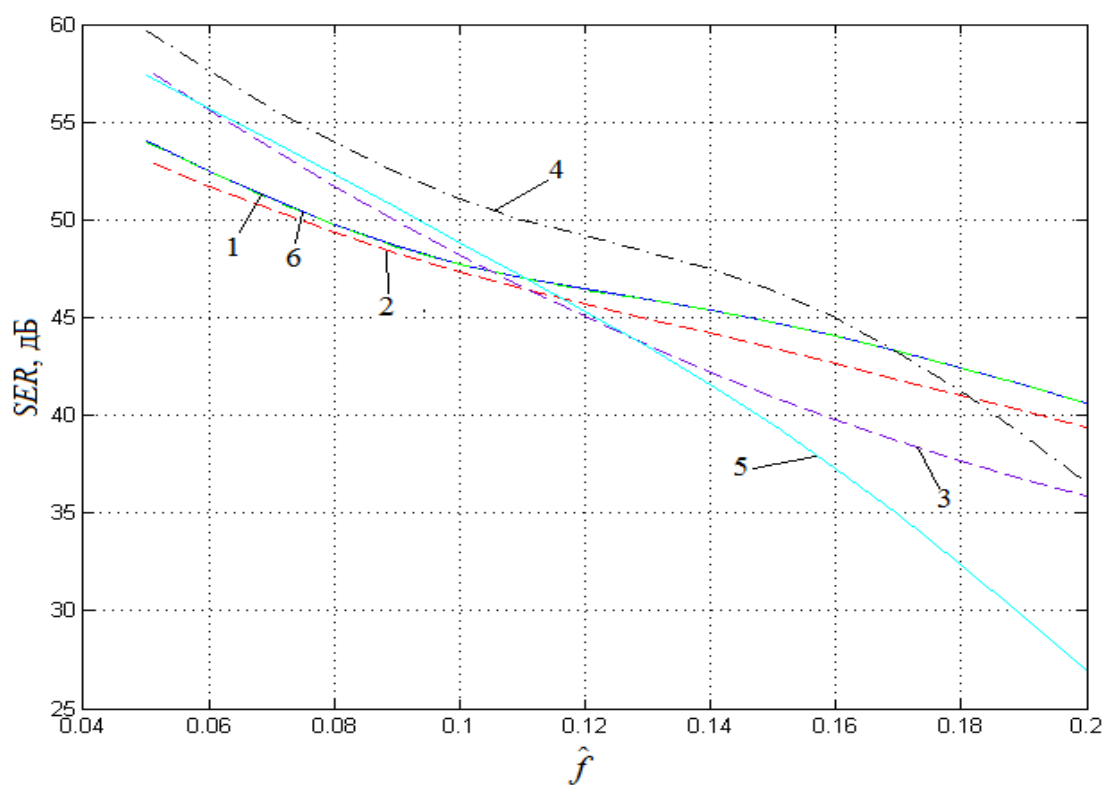


Рис. 4.9 Графики зависимости величины SER от \hat{f} при равномерном ЗРСВ τ_i , без квантования ДС по амплитуде: 1-5– алгоритмы № 1-5; 6 – тривиальный алгоритм

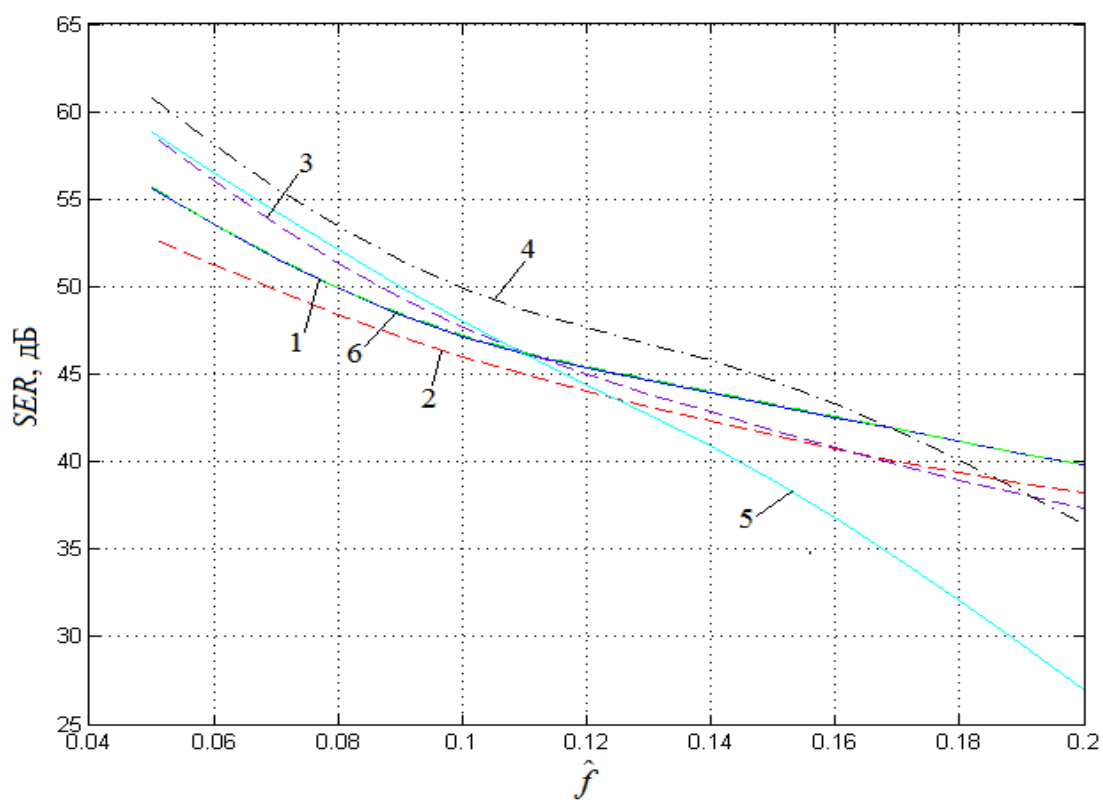


Рис. 4.10 Графики зависимости величины SER от \hat{f} при нормальном ЗРСВ τ_i , без квантования ДС по амплитуде: 1-5– алгоритмы № 1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Для подтверждения высказанной гипотезы была вычислена зависимость шума квантования периодического сигнала по амплитуде от безразмерной частоты \hat{f} . Для этого для заданных значений безразмерной частоты \hat{f} ДС, заданный в узлах равномерной ВС, подвергался процедуре дискретизации по амплитуде с учетом DNL и далее обратному цифро-аналоговому преобразованию.

Далее вычислялась мощность шума квантования:

$$P_{ш.кв.} = \frac{1}{960} \sum_{i=1}^{960} |u_i - u_{кв}|^2.$$

где u – исходные значения ДС,

$u_{кв}$ – значения ДС, полученные в результате АЦП и обратного преобразования цифрового сигнала в аналоговый сигнал.

В связи с тем, что DNL АЦП моделировалась некоторой реализацией случайного процесса, для получения статистически устойчивых оценок значения мощности шума квантования вычислялись как средние по ансамблю реализаций аддитивного шума, обусловленного DNL :

$$\langle P_{ш.кв.} \rangle = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} P_{ш.кв.}$$

График зависимости шума квантования от безразмерной частоты ДС периодического сигнала представлен на рис. 4.11.

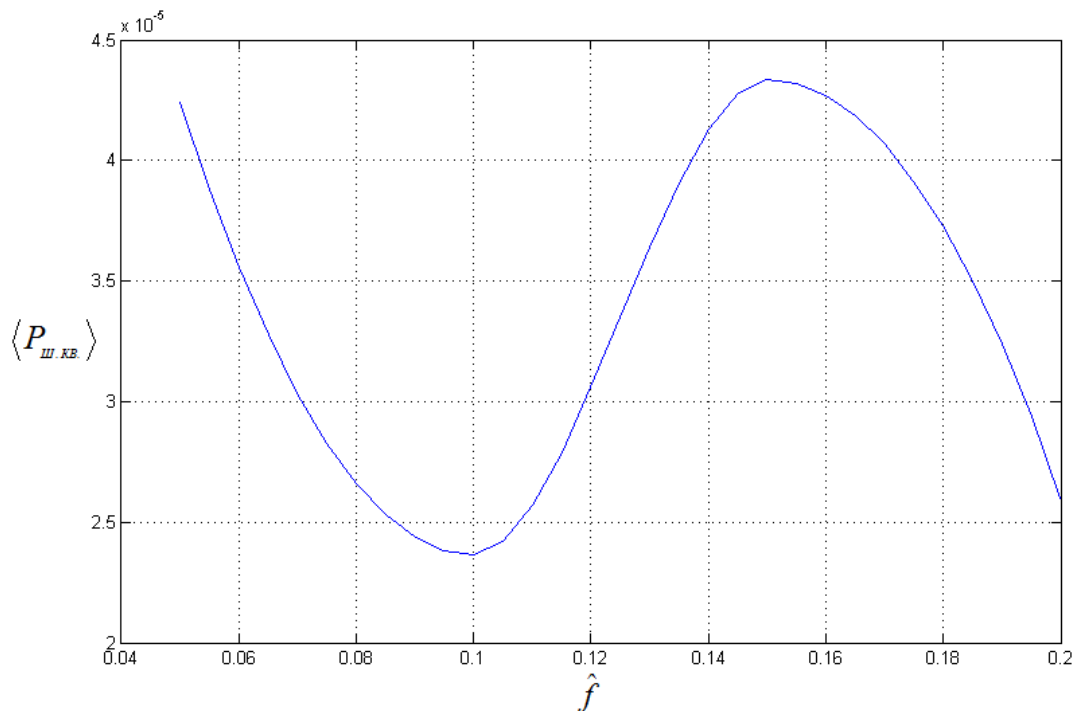


Рис. 4.11 График зависимости мощности шума квантования от безразмерной частоты

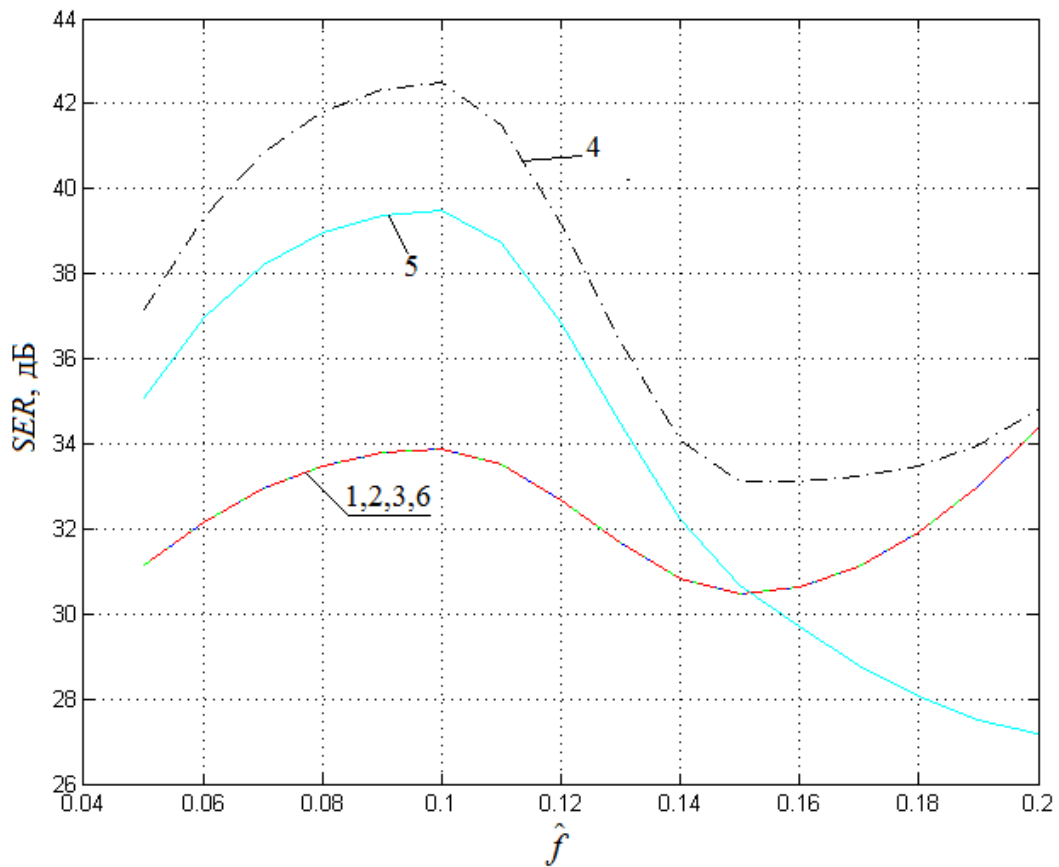


Рис. 4.12 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при $\tau_i = 0$: 1-5– алгоритмы №1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Из рис. 4.11 видно, что у изучаемой системы восьми параллельных пяти битных аналого-цифровых преобразователей, работающих с разделением во времени, зависимость мощности шума квантования сигнала по амплитуде от безразмерной частоты дискретизации \hat{f} , а, следовательно, погрешность задания значений сигнала в узлах интерполяции является немонотонной и, соответственно, погрешность восстановления сигнала будут иметь аналогичный вид. Данный вывод подтверждается видом зависимостей отношения мощности сигнала к мощности ошибки восстановления SER от безразмерной частоты \hat{f} , полученных при восстановлении дискретного сигнала, образованного на выходе рассматриваемой системы восьми параллельных пяти битных аналого-цифровых преобразователей, работающих с разделением во времени, в предположении нулевого значения относительного размаха джиттера $|\tau_i|/T$ (рис. 4.12).

Анализ зависимостей, представленных на рис. 4.7-4.12, позволяет сделать вывод о том, что при малых значениях относительного размаха джиттера $|\tau_i|/T$

определяющий вклад в погрешность восстановления дискретного сигнала, будет вносить шум квантования сигнала по амплитуде, но не шум, обусловленный джиттером.

Для нахождения области, в которой значение отношения мощности сигнала к мощности ошибки восстановления SER будет определяться джиттером частоты дискретизации, и области, в которой значение отношения мощности сигнала к мощности ошибки восстановления SER будет определяться шумом дискретизации сигнала по амплитуде, были вычислены зависимости мощности шума квантования по амплитуде $P_{ш.кв.}$ (кривая 1) и мощности шума дискретизации, обусловленного джиттером $P_{ш.jit.}$ (кривая 2) от относительного размаха джиттера $|\tau_i|/T$ для периодического дискретного сигнала с безразмерной частотой дискретизации $\hat{f} = 0.1$ без учета (рис. 4.13, 4.14) и с учетом дифференциальной нелинейности переходной характеристики аналого-цифрового преобразователя (здесь диапазон изменения шума, обусловленного дифференциальной нелинейностью, выбирался равным половине дискрета АЦП – $DNL = 0.5$) (рис. 4.14, 4.15).

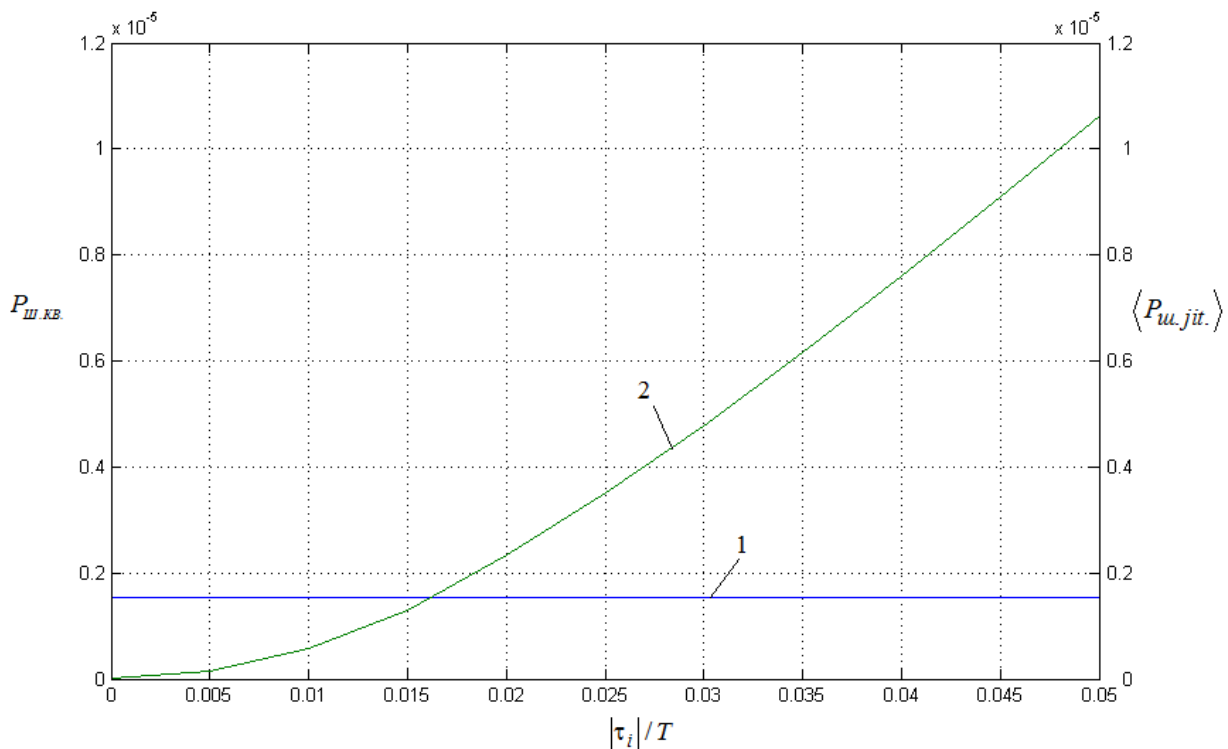


Рис. 4.13 Графики зависимости мощности шума квантования по амплитуде (кривая 1) и мощности шума дискретизации, обусловленного джиттером (кривая 2) от величины $|\tau_i|/T$ при равномерном ЗРСВ τ_i при $DNL=0$

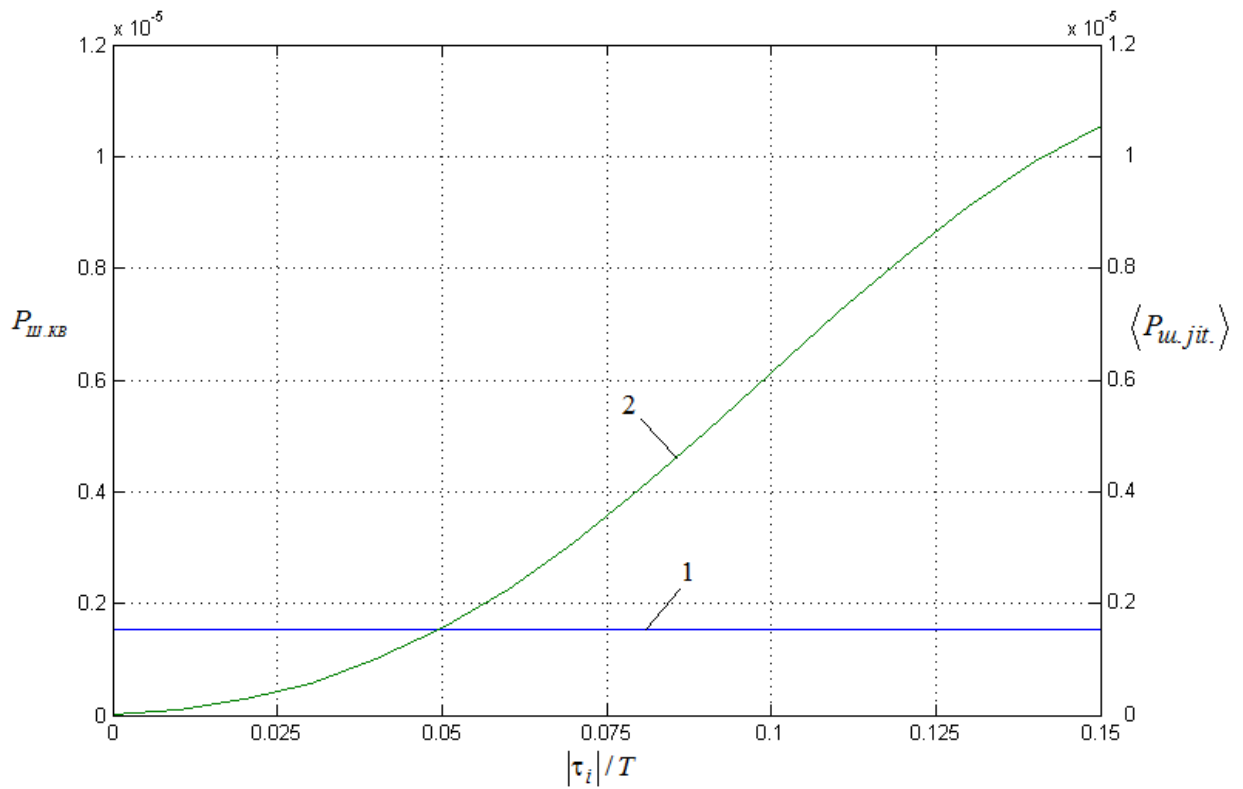


Рис. 4.14 Графики зависимости мощности шума квантования по амплитуде (кривая 1) и мощности шума дискретизации, обусловленного джиттером (кривая 2) от величины $|\tau_i|/T$ при нормальном ЗРСВ τ_i

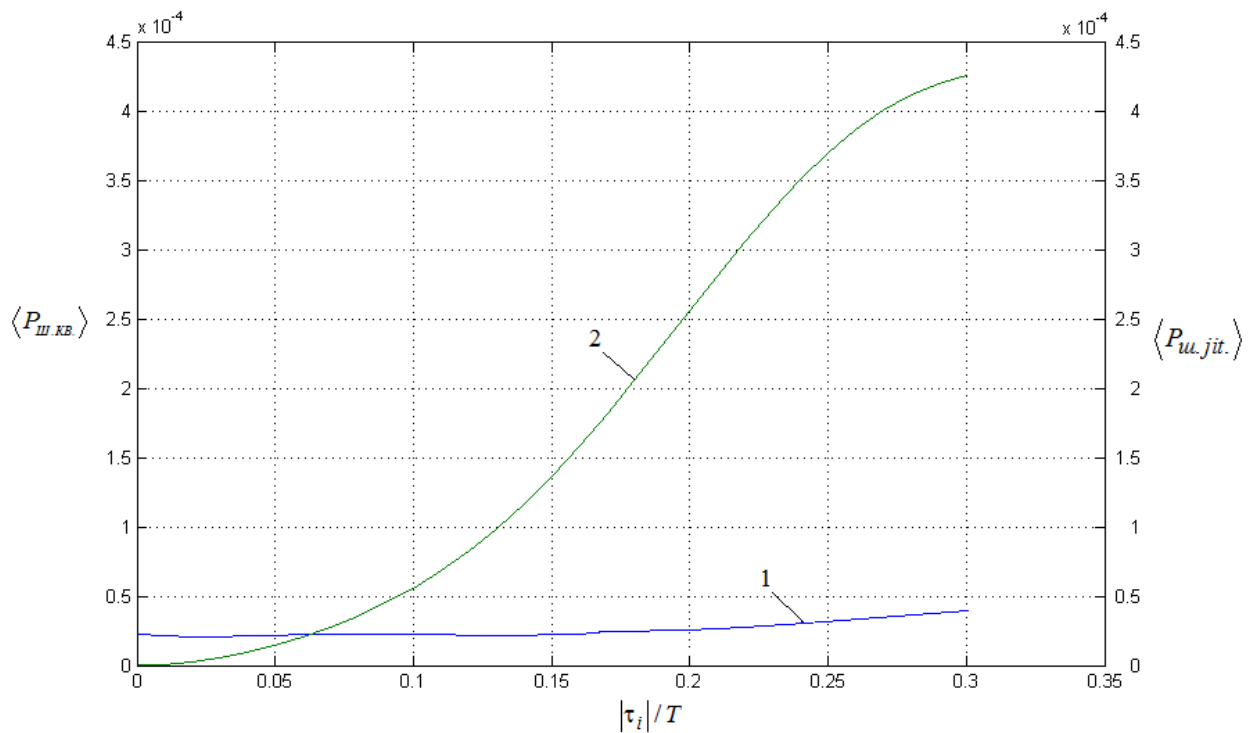


Рис. 4.15 Графики зависимости мощности шума квантования по амплитуде (кривая 1) и мощности шума дискретизации, обусловленного джиттером (кривая 2) от величины $|\tau_i|/T$ при равномерном ЗРСВ τ_i , $DNL = 0.5$

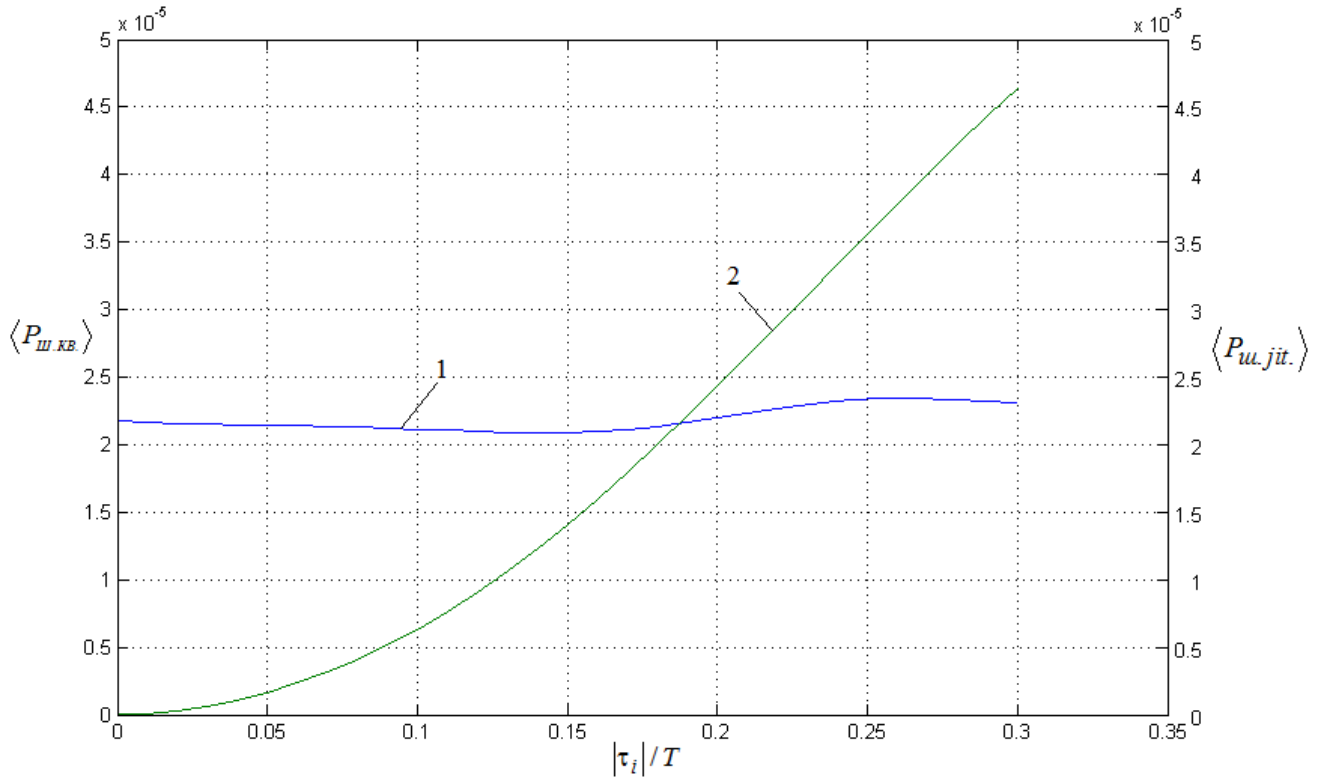


Рис. 4.16 Графики зависимости мощности шума квантования по амплитуде (кривая 1) и мощности шума дискретизации, обусловленного джиттером (кривая 2) от величины $|\tau_i|/T$ при нормальном ЗРСВ τ_i , $DNL = 0.5$

Из рис. 4.13, 4.14 видно, что при $DNL = 0$, мощность шума дискретизации $P_{ш.jit.}$ становится больше мощности шума квантования по амплитуде $P_{ш.кв.}$ при $|\tau_i|/T > 0.016$ и при $|\tau_i|/T > 0.05$ при равномерном и нормальном ЗРСВ τ_i , соответственно.

Из рис. 4.15, 4.16 видно, что при $DNL = 0.5$, мощность шума дискретизации $P_{ш.jit.}$ становится больше мощности шума квантования по амплитуде $P_{ш.кв.}$ при $|\tau_i|/T > 0.06$ при равномерном ЗРСВ τ_i , и при $|\tau_i|/T > 0.18$ при нормальном ЗРСВ τ_i .

Для подтверждения данных выводов были вычислены зависимости SER от безразмерной частоты дискретизации \hat{f} для каждого алгоритма при $|\tau_i|/T > 0.1$ при равномерном и $|\tau_i|/T > 0.2$ при нормальном ЗРСВ τ_i , представленные на рис. 4.17, 4.18.

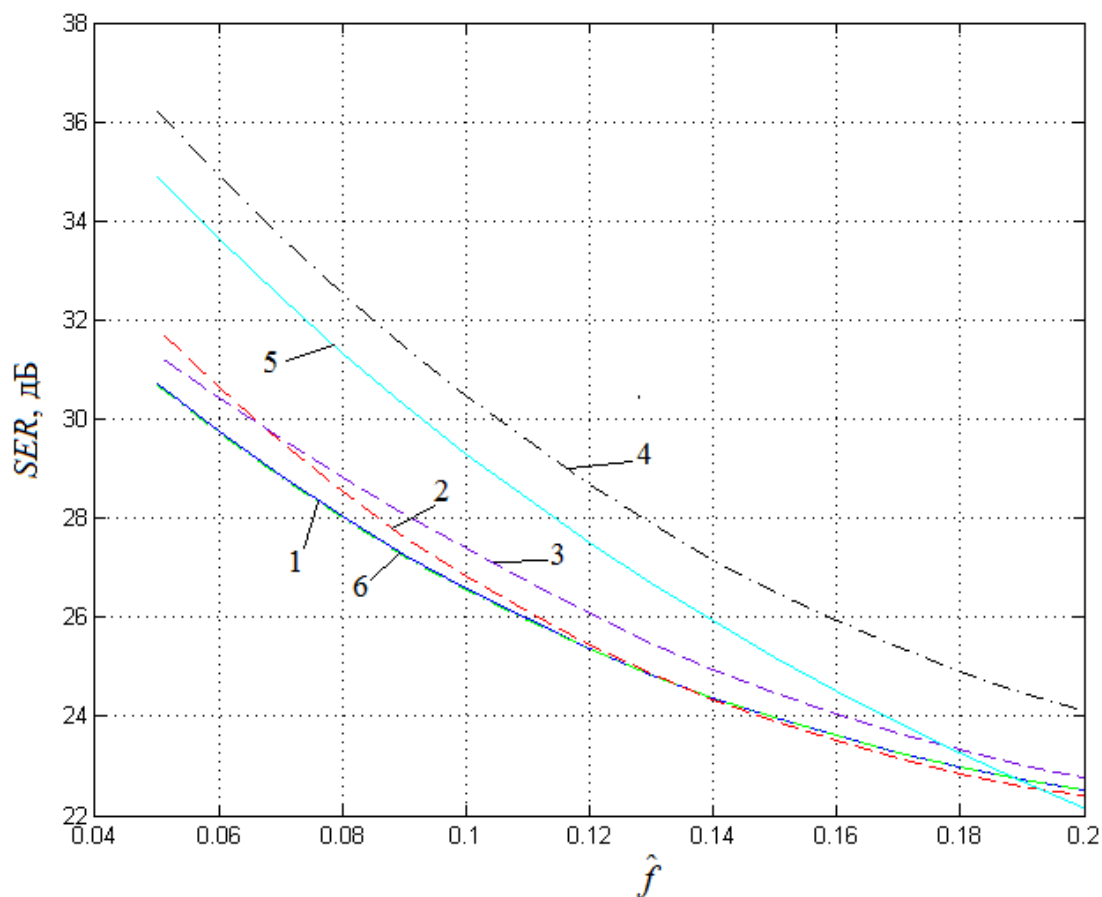


Рис. 4.17 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при равномерном ЗРЦВ τ_i , при $|\tau_i|/T = 0.1$, DNL=0.5: 1-5– алгоритмы № 1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Из рис. 4.17, 4.18 видно, что на исследованном интервале значений безразмерной частоты \hat{f} при $|\tau_i|/T = 0.1$ зависимость SER, действительно, оказывается монотонно убывающей функцией \hat{f} . При этом наибольшее значение параметра SER оказывается у алгоритма № 4.

Также были вычислены зависимости SER для периодического ДС, заданного в узлах НВС, от относительного размаха джиттера $(\max\{\tau_i\} - \min\{\tau_i\})/T$ для случая, когда значение джиттера превышает заявленные в характеристиках АЦП 0.6 пс (см. табл. 4.3). Данные зависимости представлены на рис. 4.19, 4.20. (Здесь при восстановлении ДС, заданного в узлах НВС, с помощью алгоритмов № 4, 5 были использованы значения параметров, представленные в табл. 4.4. Безразмерная частота ДС равнялась $\hat{f} = 0.1$.)

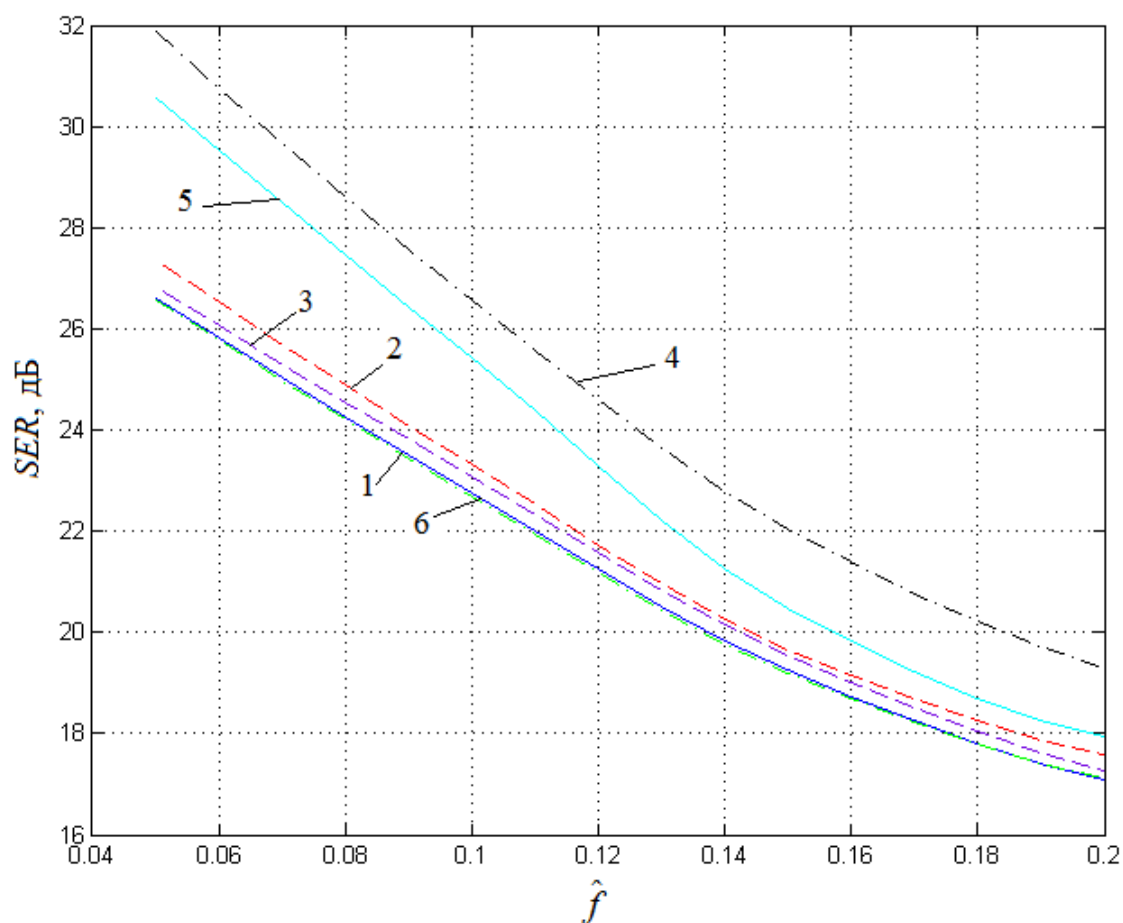


Рис. 4.18 Графики зависимости величины SER от безразмерной частоты дискретизации при нормальном ЗРСВ τ_i , при $|\tau_i|/T = 0.2$, $DNL=0.5$: 1-5– алгоритмы № 1-5; 6 – тривиальный алгоритм

Из рис. 4.19, 4.20 видно, что при увеличении размаха джиттера точность восстановления сигнала при использовании каждого из алгоритмов, описанных в Главе 3, монотонно убывает. При этом во всем исследованном диапазоне относительного размаха джиттера $|\tau_i|/T$ точность восстановления периодического ДС, заданного в узлах НВС, оказывается выше при использовании алгоритмов № 4 и № 5, чем при использовании других алгоритмов.

Таким образом, результаты проведенного исследования алгоритмов восстановления ДС, получаемого на выходе системы 8 параллельных 5-ти битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм, позволяют сделать вывод о том, что точность восстановления ДС при малых значениях относительного размаха джиттера определяется шумом квантования сигнала по амплитуде и DNL , при больших значениях – величиной джиттера.

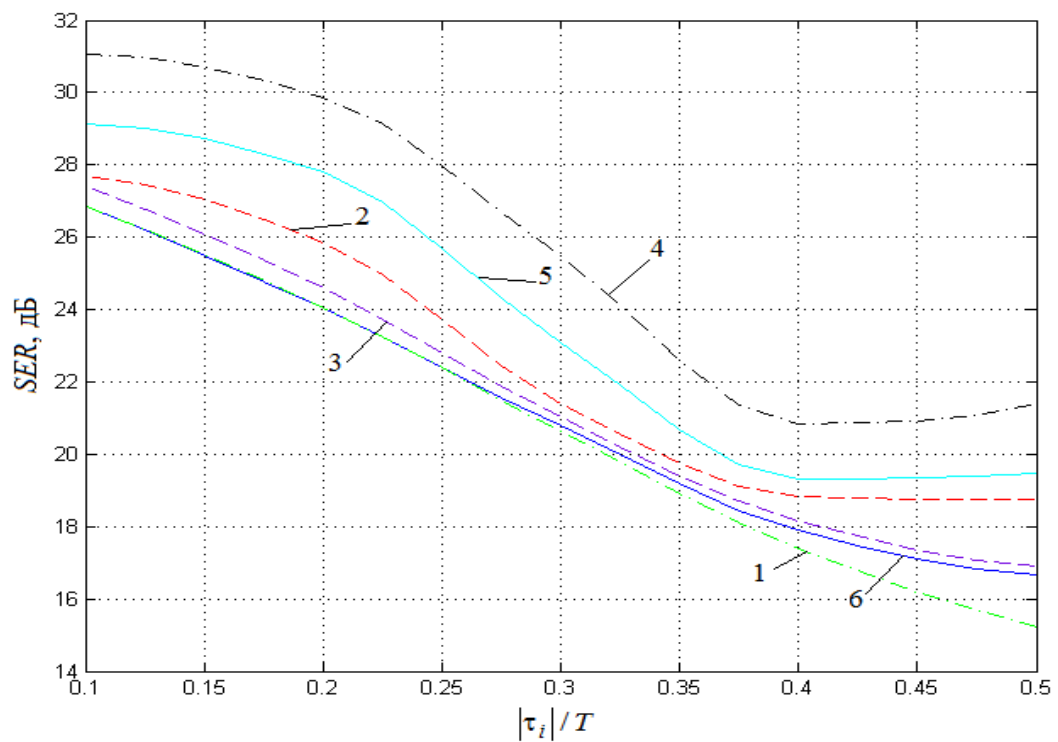


Рис. 4.19 Графики зависимости величины SER от величины $|\tau_i|/T$ при равномерном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы №1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

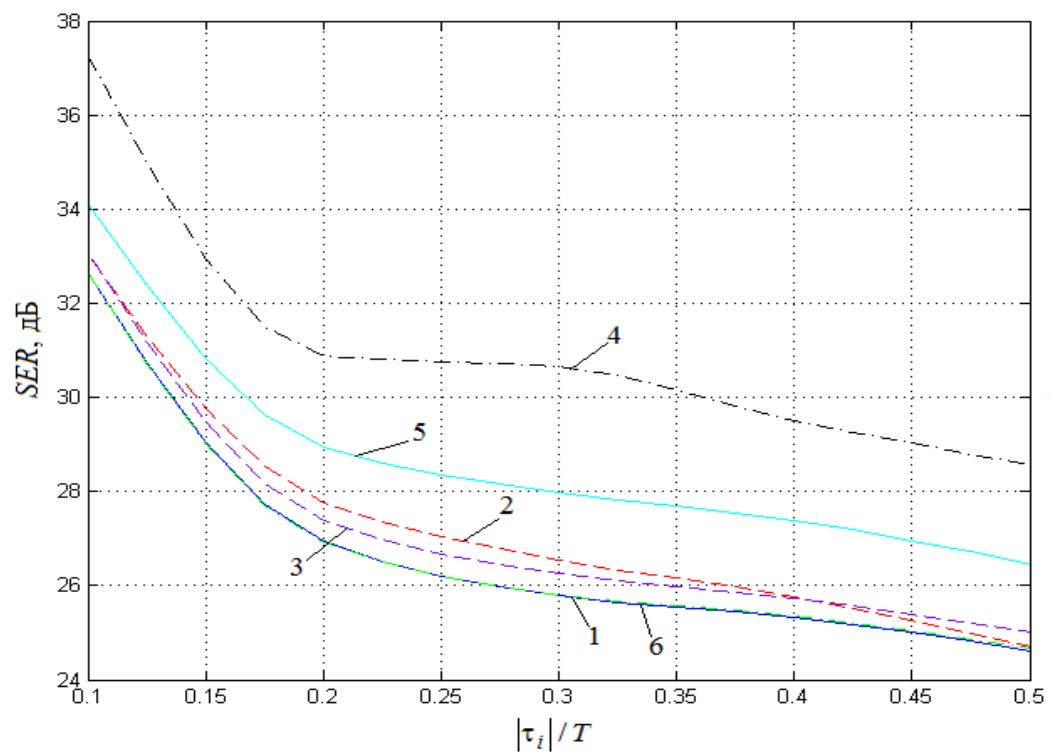


Рис. 4.20 Графики зависимости величины SER от величины $|\tau_i|/T$ при нормальном ЗРСВ τ_i : 1-5– алгоритмы №1-5, соответственно; 6 – тривиальный алгоритм

4.3 Выводы по главе

Результаты проведенного исследования алгоритмов восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными значениями координат узлов, позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработанные алгоритмы позволяют повысить точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неопределенными значениями координат узлов, получаемого с выхода изученного 8-битного высокоскоростного АЦП на основе КМОП-технологии 0.18 мкм. Из предложенных в работе алгоритмов наибольшее среднее значение SER имеет алгоритм, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра.

2. Разработанные алгоритмы позволяют повысить точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неопределенными значениями координат узлов, образованного системой из 8 параллельных 5 битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм, работающих с разделением во времени. Из предложенных в работе алгоритмов наибольшее среднее значение SER имеет алгоритм 4, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра.

Заключение

1. Проведенный анализ научных публикаций, посвященный проблемам, связанным с восстановлением ДС, заданных в узлах НВС, показал:

1.1. Существуют две отличные друг от друга постановки задачи восстановления ДС, заданных в узлах НВС, первая из которых (задача № 1) эквивалентна классической задаче интерполяции функции, заданной таблично, вторая (задача № 2) – восстановление непрерывного сигнала по значениям ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно координатами ее узлов.

1.2. Существует большое число различных видов неравномерной дискретизации, однако, с неизвестными значениями координат узлов временной сетки возникают только при стохастической и рекуррентной неравномерной дискретизации.

1.3. В большинстве методов восстановления ДС, заданного в узлах НВС, априори предполагается, что значения координат узлов известны точно, однако, на практике данное условие выполняется далеко не всегда, а потому вопрос о возможности использования данных методов для случая, когда значения координат узлов НВС точно неизвестны, требует проведения целенаправленных исследований.

1.4 Известные алгоритмы, используемые для восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно координатами ее узлов, основаны на получении оценок неизвестных значений координат узлов временной сетки, являющихся решением той или иной многопараметрической оптимизационной задачи и использовании далее известных интерполяционных методов.

1.5 Обоснованы сходство постановок задачи № 2 и задачи восстановления функциональной зависимости при наличии ошибок в независимых переменных по активной схеме регрессионного анализа, и, соответственно, целесообразность использования при разработке алгоритмов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с точно неизвестными значениями координат ее узлов, подходов, основанных на локальной аппроксимации ДС.

2. Проведено исследование интерполяционных методов восстановления ДС, заданных в узлах НВС с неизвестными значениями координат узлов, результаты которого показали, что:

2.1. Точность восстановления интерполяционных методов уменьшается при увеличении величины джиттера для всех изученных типов сигналов.

2.2. При восстановлении периодического сигнала наименее чувствительным к неопределенности задания узлов координат НВС оказывается метод адаптивных весов, требующий, однако, знания априорной информации о числе спектральных гармоник исходного сигнала, которая на практике оказывается известной далеко не всегда.

2.3. При восстановлении ЛЧМ-сигнал и АМ-сигнал наибольшую точность восстановления имеет метод сплайн-интерполяции.

2.4. При восстановлении сигнала со скачкообразно изменяющейся частотой наибольшую точность восстановления обеспечивает метод сфероидальных функций.

2.5. Методы нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенные в [55,56], в сравнении с тривиальным подходом восстановления по таблице $[iT, u_i]$ имеют меньшую точность восстановления ДС, заданного в узлах НВС с точно неизвестными координатами его узлов.

3. Обоснованы алгоритмы восстановления ДС, заданного в узлах НВС с неизвестными точно координатами узлов, не требующие решения сложных с вычислительной точки зрения оптимизационных задач, в том числе:

- алгоритм, основанный на использовании метода статистических испытаний (алгоритм № 1);
- алгоритм, основанный на учете знака мгновенных значений джиттера (алгоритм № 2);
- алгоритм, основанный на вычислении значений координат узлов неравномерной сетки с помощью аппроксимации по МНК (алгоритм № 3);
- алгоритм, основанный на применении сглаживающего по МНК нерекурсивного цифрового фильтра (алгоритм № 4);
- алгоритм, основанный на локальной аппроксимации сигнала по МНК (алгоритм № 5);

4. Для каждого из предложенных алгоритмов получены оценки точности восстановления следующих модельных сигналов: линейный тренд, полиномиальный тренд, периодический сигнал, АМ-сигнал, ЛЧМ-сигнал, сигнал со скачкообразным законом изменения частоты для случаев распределения джиттера частоты дискретизации в соответствии с равномерным и нормальным законами.

5. Для каждого из предложенных алгоритмов получены оценки точности восстановления периодического ДС, получаемого на выходе 8-битного высокоскоростного АЦП, а также системы 8 параллельных 5 битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм.

Список литературы

1. Аржанцев И. В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. М.: МЦНМО. 2003. 68 с.
2. Артюхина Н. К., Климович Т. В., Котов М. Н. Математическое моделирование Фурье - видеоспектрометра // Приборы и методы измерений: научно-технический журнал. – Минск: Белорусский национальный технический университет. 2012. №1(4). С. 24 - 29.
3. Баевский Р.М., Иванов Г.Г., Чирейкин Л.В. и др. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем // Вестник аритмологии. 2001. №24. С. 67–95.
4. Билинский И. Я., Микелсон А. К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. Рига: Зинатне. 1983. 292 с.
5. Бондаренко Ю. В. Фильтрация шума при восстановлении периодического сигнала по неравномерным отсчетам в условиях передискретизации // Автометрия. 2005. Т. 41. № 5. С. 44-50.
6. Бондаренко Ю. В., Касперович А. Н. Итерационное восстановление сигнала с ограниченной полосой по неравномерным отсчетам // Автометрия. 2002. № 1. С. 25-30.
7. Бондаренко Ю. В., Касперович А. Н. Нелинейное восстановление сигналов по неравномерным отсчетам // Новосибирск. Автометрия. 1999. № 4. С. 61-70.
8. Бородюк В.П., Вошинин А.П. Ошибки регистрации независимых переменных в задачах множественной регрессии / Заводская лаб. 1973. Т. 39. С. 831-835.
9. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. М.: Радио и связь. 1982. 256 с.
10. Ефимов В. М. Влияние амплитудных шумов на точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 1999. № 5. С.52-59.
11. Ефимов В. М., Касперович А. Н., Резник А. Л. Восстановление сигнала с конечным числом степеней свободы при его неравномерной дискретизации // Автометрия. 2000. № 3. С. 26–31.
12. Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В. Асимптотически оптимальное восстановление сигнала с неограниченной по частоте спектральной плотностью при его

периодически неравномерной и равномерной дискретизации // Автометрия. 2003. № 6. С. 59-67.

13. Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В. Восстановление сигнала с неограниченным по частоте спектром при периодически неравномерной дискретизации // Автометрия, 2002, №5, vol. 38, с. 30-37.

14. Жилинская Е.И., Товмаченко НЛ., Федоров В.В. Методы регрессионного анализа при наличии ошибок в предикторных переменных. М.: Изд-во АН СССР. 1978. С 34.

15. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука. 1981. 281 с.

16. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 336 с.

17. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к 1 Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции. М.: Управление связи РККА. 1933. С. 1-19.

18. Кусайкин Д.В. Исследование методов восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации в системах телекоммуникаций / Информационные технологии в мире коммуникаций: сборник тезисов участников VII Всероссийской научно-практической конференции. 2014. М. 2014. С. 153-159.

19. Кусайкин Д.В. Исследование методов восстановления частотно модулированных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке / Общество, наука и инновации: сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа: РИЦ БашГУ. 2013. Ч. 2. С. 71-75.

20. Кусайкин Д.В. Неравномерная дискретизация, ее виды и области применения в телекоммуникационных системах // Теория, техника и экономика сетей связи: Сборник научно-технических и методических трудов. – Екатеринбург: УрТИСИ ФГБОУ ВПО «СибГУТИ». 2013. Вып.11. С. 8-11.

21. Кусайкин Д.В. О восстановлении дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, с неопределенными местоположениями отсчетов / Межвузовский научный семинар «Информационные технологии и когнитивная электросвязь». 2014. С.30-38.

22. Кусайкин Д.В. Поршнев С.В. Исследование методов восстановления сигналов с неравномерной частотой дискретизации // Теория, техника и экономика сетей связи: Сборник научно-технических и методических трудов. Екатеринбург: УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ». 2014. Вып.12. С. 218-226.
23. Кусайкин Д.В. Поршнев С.В. Классификация видов неравномерной дискретизации // Теория, техника и экономика сетей связи: Сборник научно-технических и методических трудов. Екатеринбург: УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ». 2013. Вып.11. С. 51-54.
24. Кусайкин Д.В., Поршнев С.В. О возможности повышения точности восстановления дискретного сигнала, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов / 16-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA 2014». М. 2014. С. 216-220.
25. Кусайкин Д.В., Поршнев С.В. Пакет MATLAB Non-uniform Sampling Toolbox / Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. М-во обр. и науки РФ. Тамбов. 2013. Ч. 2. С. 91-92.
26. Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. СПб.: БХВ-Петербург. 2004. 320 с.
27. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. MATLAB Non-uniform Sampling Toolbox. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №20136115162 от 29 мая 2013 г.
28. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Алгоритмы восстановления неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными координатами отсчетов / Современные информационные и электронные технологии: труды XV международной научно-практической конференции. 2014. Украина, Одесса. Том 1. С. 201–202.
29. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Алгоритмы повышения точности восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2014. № 6. С. 17-23.
30. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Исследование методов восстановления неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными координатами узлов временной сетки // Электросвязь. 2015. №2. С. 32-37.

31. Поршнеv С.В., Кусайкин Д.В. Исследование точности методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке // В мире научных открытий. 2013. Т. 46, № 10 С. 261–279.
32. Поршнеv С.В., Кусайкин Д.В. Методы повышения точности восстановления неравномерно дискретизированных сигналов при неизвестных значениях координат узлов временной сетки // Вестник СибГУТИ. 2014. №1. С. 24-34.
33. Поршнеv С.В., Кусайкин Д.В. О восстановлении неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. №6. С.3-35.
34. Поршнеv С.В., Кусайкин Д.В. Оценка точности алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с точно неизвестными значениями координат узлов // Вестник СибГУТИ. №1. 2015. С. 97-108.
35. Прохоров, С. А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосмического ун-та. 2001. 375 с.
36. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир. 2001. С. 604.
37. Федоров В.В. Регрессионный анализ при наличии погрешностей в определении предиктора. Вопросы кибернетики. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1978. Вып.47. С. 69–75.
38. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. М.: Недра. 1987. 221 с.
39. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука. 1971. 408 с.
40. Эдвардс С. Оптимизация шумовых параметров сигнальных цепей Часть 2. Шумы и искажения в преобразователях данных // Электронные компоненты. 2013. № 10. С. 19-25.
41. Abidi A.A., Meyer R.G. Noise in relaxation oscillators // IEEE J. Solid State Circuits, Dec. 1983. P. 794–802.
42. Aldroubi A., Leonetti C. Non-Uniform Sampling and Reconstruction from Sampling Sets with Unknown Jitter // Sampling Theory in Signal & Image Processing. 2008. Vol. 7. № 2. P. 187–195.
43. Amini A., Marvasti F. Reconstruction of multiband signals from non-invertible uniform and periodic Nonuniform samples using an iterative method // SAMPTA. 2007.

44. Ariananda D.D., Leus G., Zhi Tian. Multi-coset sampling for power spectrum blind sensing // 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP). 2011. P. 1–8.
45. Banning R., Koning W.L. Spectral Analysis of Laser Doppler Anemometry Velocity Measurements in Turbulent Flows. In Sampling Theory and Applications // Proc. Workshop SAMPTA'97. Aveiro, Portugal. June 1997. P. 121-126.
46. Berenguer C. Estimation fréquentielle et filtrage de signaux non uniformément échantillonnés: Application à l'estimation radar Doppler non ambiguë. PhD thesis. University of Nice-Sophia Antipolis, France. 1994.
47. Beutler F. J. Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples // SIAM Review. 1966. V. 8. № 3. P. 328-335.
48. Beutler F.J., Leneman A.Z. Random Sampling of Random Processes: Stationary Points Processes // Information and Control. 1966. V. 9. P. 325–344.
49. Beutler F.J., Leneman A.Z. The theory of Stationary Points Processes // Acta Math. 1966. V. 116. P. 159–197.
50. Bilinskis I. Digital Alias-free Signal Processing. London: Wiley. 2007. P. 430.
51. Bilinskis I., Mikelson A. Randomized Signal Processing. Cambridge: Prentice Hall. 1992. P. 665.
52. Bofill P., Monte E. Towards underdetermined source reconstruction from a clap-and-play binaural live recording. Signal Processing Conference, 2006 14th European. Florence. 2006. P. 1-4.
53. Bokser V., Oberg C., Sukhatme G. S., Requicha A.A. A small submarine robot for experiments in underwater sensor networks // IFAC -International Federation of Automatic Control Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles. 2004.
54. Bresler Y., Ping Feng. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of 2-D multiband signals //roc. 3rd IEEE Int. Conf. on Image Processing, ICIP'96. 1996. V. 1. P. 701-704.
55. Browning J. A method of finding unknown continuous-time nonuniform sample locations of band-limited functions // Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations XIV. 2004. V. 5559. P. 289–296.
56. Browning J. Approximating Signals From Nonuniform Continuous Time Samples at Unknown Locations // IEEE Transactions on Signal Processing. 2007. V. 55. № 4. P. 1549-1554.

57. Cayirci E., Tezcan H., Dogan Y., Coskun V. Wireless sensor networks for underwater surveillance systems // *Ad Hoc Networks*. 2006. V. 4. № 4. P. 431-446.
58. Cenker C., Feichtinger H. G., Herrmann M. Iterative algorithms in irregular sampling a first comparison of methods // *10th IEEE IPCCC*. 1991. P. 483 – 489.
59. Choi M., Abidi A.A. A 6-b 1.3-Gsample/s A/D converter in 0.35- μ m CMOS // *IEEE-Journal-of-Solid-State-Circuits*. 2001. V. 36. № 12. P. 1847-1858.
60. Christini D. J., Bennett F.H., Lutchen K.R., Ahmed H.M. Application of linear and nonlinear time series analysis modeling to heart rate dynamics analysis // *IEEE Trans. Biomedical Eng.* 1995. V. 42. P. 411-415.
61. Cui-Ping Li, Bing-zhao Li, Tian-Zhou Xu. Approximating bandlimited signals associated with the LCT domain from nonuniform samples at unknown locations // *Signal Processing*. 2012. V. 92. № 7. P. 1658–1664.
62. Dalt Da N., Harteneck M., Sandner C., Wiesbauer A. On the jitter requirements of the sampling clock for analog-to-digital converters // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems – ISCAS*. 2002. V. 49. № 9. P. 1354-1360.
63. De Juan A., Maeder M., Martinez M., Tauler R. Combining hard- and soft-modelling to solve kinetic problems // *Chemom. Intell. Lab. Syst.* 2000. V. 54. № 2. P. 123-141.
64. Divi V., Wornell G. Signal recovery in time-interleaved analog-to-digital converters // *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.* 2004. P. 593–596.
65. Elbornsson J., Gustafsson F., Eklund J. Blind Equalization of Time Errors in a Time-Interleaved ADC System // *IEEE Transaction on Signal Processing*. 2005. V. 53. № 4. P. 1413 – 1424.
66. El-Chammas, M., Murmann, B. A 12-GS/s 81-mW 5-bit time-interleaved flash ADC with background timing skew calibration // *Symposium on VLSI Circuits*. 16-18 June 2010. P. 157–158.
67. Eng F. Nonuniform sampling in statistical signal processing. PhD Thesis. Department of Electrical Engineering. Linkoping University, Linkoping, Sweden. 2007. P. 152.
68. Feichtinger H. G., Grochenig K., Strohmer T. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory / *Numerische Mathematik*. 1995. №69. P. 423–440.
69. Feizi S., Angelopoulos G., Goyal V., Medard M. Energy-Efficient Time-Stamless Adaptive Nonuniform Sampling // *in Sensors, 2011 IEEE*. 2011. P. 912-915.

70. Feizi S., Goyal V.K., Medard M. Time-Stampless Adaptive Nonuniform Sampling for Stochastic Signals //IEEE Transactions on Signal Processing. 2012.V.60. № 10. P.5440-5450.
71. Feng P., Bresler Y. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals // 1996 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1996. V. 3. P. 1688 – 1691.
72. Ferreira P. J. S. G. Interpolation and the Discrete Papoulis-Gerchberg Algorithm // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. V. 42. № 10. P. 2596-2606.
73. Ferreira P. J. S. G., Vieira J. M. N. Detection and Correction of Missing Samples // Proceedings of the 1997 Workshop on Sampling Theory and Applications. Aveiro, Portugal. 1997. P. 169–174.
74. Ferreira P. J. S. G., Vieira J. M. N. Locating and correcting errors in images // International Conference on Image Processing. 1997. V.1. P. 691–694.
75. Ferreira P. The stability of a procedure for the recovery of lost samples in band-limited signals // Signal Processing. 1994. V. 40. № 3. P. 195–205.
76. Ford C., Etter D.M. Wavelet Basis Reconstruction of Nonuniformly Sampled Data //IEEE Transactions on circuits and systems—II: analog and digital signal processing. 1998. V. 45. № 8. P. 1165-1168.
77. Ganesan D., Ratnasamy S., Wang H., Estrin D. Coping with irregular spatio-temporal sampling in sensor networks // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 2004. V. 34. №1. P. 125-130.
78. Godsill S.J. The restoration of degraded audio signals. PhD thesis. Dept. of Engineering. University of Cambridge. 1993.
79. Golanski R., Kolodziej J. Nonuniform sampling delta modulation: decoding problems // WSEAS Transactions on Circuits and Systems. 2008. V.7. № 2. P. 85-92.
80. Golanski R., Kolodziej J. Adaptive nonuniform sampling delta modulation: practical design studies // WSEAS Transactions on Circuits and Systems. 2010. V. 9. № 10. P. 617–626.
81. Grochenig K., Schwab H. Fast Local Reconstruction Methods for Nonuniform Sampling in Shift Invariant Spaces // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2003. V. 24. № 4. P. 899-913.
82. Haideh Khorramabadi, Electrical Engineering 247, Lecture 12: Data Converters-Testing. Lectures Notes. University of California, Berkeley, 2010. URL:

https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee247/fa10/files07/lectures/L12_2_f10.pdf (дата обращения: 01.02.2015).

83. Hajimiri A., Lee T.H. A general theory of phase noise in electrical oscillators // IEEE J. Solid-State Circuits. Dec. 1998. V. 28. P. 1273–1282.

84. Hajimiri A., Lee T.H. The Design of Low Noise Oscillators. New York. Springer. 1999. P. 208.

85. Hofner T.C. Boost your sampling rate with time-interleaved data converters // Sensors Mag. 2001. V.18. № 2.

86. Hormati A., Roy O., Lu Y.M., Vetterli M. Distributed sampling of correlated signals linked by sparse filtering: Theory and applications // IEEE Trans. Signal Process. 2010. V. 58. № 3. P. 1095–1109.

87. Hotz M., Vogel C. Block Processing with Iterative Correction Filters for Time-Interleaved ADCs // Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Florence (Italy). 4-9 May 2014. P. 4961–4965.

88. Huang S., Levy B. C. Blind calibration of timing offsets for four channel time-interleaved ADCs // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers. 2007. V. 54. № 4. P. 863–876.

89. IEEE standard for terminology and test methods for analog-to-digital converters. IEEE Std 1241-2000. 2001. P. 92.

90. Jenq Y.C., Li Q. Differential non-linearity, integral non-linearity, and signal to noise ratio of an analog to digital converter. IMEKO International Measurement Confederation. Chicago. 2002.

91. Kahn J. M., Katz R. H., Pister S. J. Next century challenges: Mobile networking for “smart dust” // ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (MOBICOM). 1999. P. 271–278.

92. Karthik M., Prabhu K. M. M. On the Eigenvalues of Matrices for the Reconstruction of Missing Uniform Samples //IEEE Transactions on signal Processing. 2010. V. 58. № 5. P. 2896-2900.

93. Kumar A. Bandlimited Signal Reconstruction From the Distribution of Unknown Sampling Locations // Proc. of the Sampling Theory and Applications (SampTA) workshop, July 2013. CoRR abs/1303.1285.

94. Laguna P., Moody G.B., Mark R.G. Power spectral density of unevenly sampled heart rate data // Proc. IEEE-EMBC '95. 1995. P. 157-158.

95. Leger G., Peralias E.J., Rueda A., Huertas J.Ly Impact of random channel mismatch on the SNR and SFDR of time-interleaved ADCs // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2004. V. 51. № 1. P. 140 – 150.
96. Legg J. A. Synthetic aperture radar using non-uniform sampling. PhD thesis. University of Adelaide. 1997. P. 198.
97. Leming Qu, Routh P.S., Anno P.D. Wavelet Reconstruction of Nonuniformly Sampled Signals // IEEE signal processing letters. 2009. V. 16. № 2. P. 73-76.
98. Leow K. S. J. Reconstruction from Non-uniform Samples. Master's Thesis. Boston. 2010. P. 81.
99. Lexa M., Davies M., Thompson J. Multi-coset Sampling and Recovery of Sparse Multiband Signals // University of Edinburgh Institute of Digital Communications Technical Report. 2011. P. 9.
100. Li Q. INL, DNL and Performance of Analog to Digital Converter. Electrical and Computer Engineering. Portland State University. URL: <http://web.cecs.pdx.edu/~edam/Reports/2002/Li.pdf> (дата обращения: 01.02.2015).
101. Ljung L. System Identification: Theory for the User. Prentice Hall, 2 ed. 1999. P. 672.
102. Lu Y. M., Vetterli M. Multichannel sampling with unknown gains and offsets: A fast reconstruction algorithm // Proc. Allerton Conference on Communication, Control and Computing. Monticello. 2010.
103. Majumdar S. J., Aberson S.D., Bishop C.H., Buizza R. A comparison of adaptive observing guidance for Atlantic tropical cyclones // 27th Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology. 2006. V. 134. P. 2354-2372.
104. Maloberti F., Estrada P., Malcovati P., Valero A. Behavioral modeling and simulations of data converters (IWADC '00). Vienna, Austria. 2000. P. 229-236.
105. Margolis E. Reconstruction of periodic bandlimited signals from nonuniform samples. Research Thesis, M.S. Israel Institute of Technology. 2004. P. 127.
106. Margolis E., Eldar Y.C. Nonuniform Sampling of Periodic Bandlimited Signals // IEEE Transactionson signal Processing. 2008. V. 56. № 7. P. 2728- 2745.
107. Marks R. J. Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory. Springer Texts in Electrical Engineering. Springer-Verlag, New York. 1991.
108. Marques M., Neves R., Marques J. S., Sanches J. The papoulis-gerchberg algorithm with unknown signal bandwidth // Proceeding ICIAR'06 Proceedings of the Third international conference on Image Analysis and Recognition. 2006. V. 4141. P. 436-445.

109. Martinez-Nuevo P., Patil S., Tsvividis Y. Derivative Level-Crossing Sampling // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 2015. V.62. № 1. P.11-15.
110. Marvasti F. Nonuniform Sampling: Theory and Practice. Information Technology: Transmission, Processing and Storage. 2000. P. 924.
111. Marvasti F. Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods // IEEE Transactions on signal processing. 1991. Vol. 39. № 4. P. 872-878.
112. Marziliano P. Sampling Innovations. PhD. Thesis. Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Switzerland. 2001. P. 94.
113. Marziliano P., Vetterli M. Irregular sampling with unknown locations // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1999. V. 3. P. 1657–1660.
114. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // IEEE Transactions on Signal Processing. 2000. V. 48. № 12. P. 3462–3471.
115. McNeill J. A., David C., Coln M., Croughwell R. Split ADC calibration for all-digital correction of time-interleaved ADC errors // IEEE Trans. Circuits Syst. II. 2009. V. 56. № 5. P. 344–348.
116. Mishali M., Eldar Y.C. Blind Multiband Signal Reconstruction: Compressed Sensing for Analog Signals // IEEE Transactions on Signal Processing. 2009. V. 57. № 3. P. 993 – 1009.
117. Moshinsky M., Quesne C. Linear canonical transformations and their unitary representations // Journal of Mathematical Physics. 1971. V.12. № 8. P. 1772–1783.
118. Mouhcine Chami, Joseph Di Martino, Laurent Pierron, El Hassan Ibn Elhaj. Real-time signal reconstruction from short-time fourier transform magnitude spectra using FPGAs. 5th. International conference on information systems and economic intelligence - SIIE 2012, Feb 2012, Djerba, Tunisia.
119. Neves R. F., Franca J. E. A CMOS switched-capacitor bandpass filter with 100 MSample/s input sampling and frequency downconversion // in Proc. ESSCIRC. Sept. 2000. P. 248–251.
120. Nordio A., Chiasserini C., Viterbo E. Linear Signal Reconstruction from Jittered Sampling // Author manuscript, published in SAMPTA'09. Marseille, France. 2009.
121. Nordio A., Chiasserini C., Viterbo E. Performance of Linear Field Reconstruction Techniques With Noise and Uncertain Sensor Locations // IEEE Transactions on signal Processing. 2008. V. 56. № 8. P. 3535-3547.

122. Nordio A., Chiasserini C., Viterbo E. Signal Reconstruction Errors in Jittered Sampling // IEEE Transactions on signal Processing. 2009. V. 57. № 12. P. 4711-4718.
123. Oliveira P. Interpolation of signals with missing data using PCA // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP '06). May 2006. V. 3. P. 828–831.
124. P. Boufounos. Reconstruction of sparse signals from distorted randomized measurements // in Proc. Intl. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Dallas, TX, Mar. 2010.
125. Park S.C., Park M.K., Kang M.G. Super-resolution image reconstruction: A technical overview // IEEE Signal Process. Mag. 2003. V. 20. № 3. P. 21-36.
126. Patwari N., Ash J. N., Kyperountas S., Hero A.O. Location the nodes: Cooperative localization in wireless sensor networks // IEEE Signal Processing Magazine. 2005. V. 22. № 4. P. 54–69.
127. Petkovski M., Bogdanova S., Bogdanov M. A Simple Adaptive Sampling Algorithm // XIV Telecommunications Forum – TELFOR 2006. Belgrade, Serbia. 2006. P. 329-332.
128. Porshnev S.V. Effect of Signal Duration on Analytical Frequency Meter Accuracy // Measurement Techniques. 2000. V. 43. № 3. P. 276–280.
129. Porshnev S.V., Kusaykin D.V. Evaluation of accuracy of recovery methods of discrete signals, set in the non-uniform time grid // In the world of scientific discoveries. Vol. 2. No. 1. 2014. P. 130-140.
130. Poulton K., Neff R., Setterberg B., Wuppermann B. A 20GS/s ADC with a 1MB memory in 0.18 μ m. CMOS // Solid-State Circuits Conference, 2003. Digest of Technical Papers. ISSCC. 2003 IEEE International. 13-13 Feb. 2003. V. 1. P. 318–496.
131. Prendergast R. S., Levy B.C., Hurst P. J. Reconstruction of bandlimited periodic nonuniformly sampled signals through multirate filter banks // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2004. V. 51. P. 1612-1622.
132. Qu D., Ma B., Zhou J. Optimal Weighted Periodic Nonuniform Sampling Sequences for Digital Alias-free Signal Processing // Signal Processing (ICSP), 2010 IEEE 10th International Conference. 2010. P. 147-150.
133. Qu D., Tarczynski A. Weighted PNS sequences for digital alias-free processing signals // Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on SYSTEMS. Vouliagmeni, Athens, Greece. July 2006. P. 1-6.

134. Rashidi M. Non-uniform sampling and reconstruction of multi-band signals and its application in wideband spectrum sensing of cognitive radio // ArXive-prints. 2010. P. 58.
135. Razavi B. A study of phase noise in CMOS oscillators // IEEE J. Solid-State Circuits. Mar. 1996. V. 31. P. 331–343.
136. Saleem S., Vogel C. Adaptive Blind Background Calibration of Polynomial-Represented Frequency Response Mismatches in a Two-Channel Time-Interleaved ADC // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. June 2011. V. 58. № 6. P. 1300-1310.
137. Sauer T. Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals. Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 3811-3814.
138. Sbaiz L., Vandewalle P., Vetterli M. Groebner Basis Methods for Multichannel Sampling with Unknown Offsets // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2008. V. 25. № 3. P. 277–294.
139. Scoular S. C., Fitzgerald W. J. Periodic nonuniform sampling of multiband signals // Signal Processing. 1992. V. 28. № 2. P. 195-200.
140. Selva J. Functionally weighted Lagrange interpolation of band-limited signals from nonuniform samples // IEEE Transactions on Signal Processing. 2009. V. 57. № 1. P. 168-181.
141. Senay S. Signal reconstruction from Nonuniform samples using prolate spheroidal wave functions: theory and application. PhD thesis. University of Pittsburgh. 2011. P. 117.
142. Senay S., Chaparro L.F., Durak F. Reconstruction of nonuniformly sampled time-limited signals using prolate spheroidal wave functions // Signal Processing. December 2009. V. 89. № 12. P. 2585–2595.
143. Serdaroglu B. Signal reconstruction from nonuniform samples. Msc Thesis. 2005.
144. Shahriar C. M. R., Polash B. A., Harun M., Anderson C. R. Jitter analysis of time interleaved ADC/DAC systems for software defined radio (SDR) with PN sequence // Software Defined Radio Conference. 2008. P. 1-5
145. Shapiro H. S., Silverman R. A. Alias free sampling of random noise // Journal Society for Industrial and Applied Mathematics. 1960. V. 8. № 2. P. 225-248.
146. Singh M., Lu C., Basu A., Mandal M. Choice of low resolution sample sets for efficient super-resolution signal reconstruction // Journal of Visual Communication and Image Representation. 2012. V. 23. № 1. P. 194-207.

147. Sommen P. On the Relationship Between Uniform and Recurrent Nonuniform Discrete-Time Sampling Schemes. /P. Sommen, K. Janse // IEEE Transactions on signal Processing. 2008. Vol. 56, NO. 10, pp. 5147-5156
148. Strohmer T. Efficient methods for digital signal and image reconstruction from nonuniform samples. PhD. Thesis. Univ. of Vienna. 1993.
149. Strohmer T., Tanner J. Fast Reconstruction Methods for Bandlimited Functions from Periodic Nonuniform Sampling // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2006. V. 44. №3. P. 1073-1094.
150. Sun Y., Signell S. Effects of noise and jitter on algorithms for bandpass sampling in radio receivers // In Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). 2004. V. 1. P. 761-764.
151. Sun, Yi-Ran Nonuniform Bandpass Sampling in Radio Receivers. PhD Thesis, Royal Institute of Technology Department of Microelectronics and Information Technology Laboratory of Electronics and Computer Systems. Stockholm, Sweden, 2004.
152. Tao R., B.-Z. Li, Yue Wang. On sampling of band-limited signals associated with the linear canonical transform // IEEE Transactions on Signal Processing. 2008. V. 56. № 11. P. 5454–5464.
153. The Autonomous Ocean Sampling Network (AOSN) project [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mbari.org/aosn/> (дата обращения 01.02.2015).
154. Tian J. Reconstruction of irregularly sampled interferograms in imaging Fourier transform spectrometry. Thesis (Ph. D.) – School of Electrical and Computer Engineering. Georgia Institute of Technology. 2004. P. 140.
155. TS8388B ADC 8-bit 1 GSPS. Datasheet, Atmel Corporation. P. 57.
156. Tuncer T. E., Serdaroglu B. Block-based methods for the reconstruction of finite-length signals from nonuniform samples // IEEE Trans. Signal Process. 2007. V. 5. P. 530-541.
157. Unser M. Sampling –50 years after Shannon // Proceedings of the IEEE. 2000. V. 88. № 4. P. 569–587.
158. Unser M. Sampling: 60 Years After Shannon //Plenary talk, Sixteenth International Conference on Digital Signal Processing (DSP2009). Santorini, Greece. July 2009. P.42.
159. Vandewalle P., Sbaiz L., Vandewalle J., Vetterli M. Aliasing is Good for You: Joint Registration and Reconstruction for Super-Resolution. Technical Report. 2006. P. 30.

160. Vandewalle P., Sbaiz L., Vandewalle J., Vetterli M. Super-Resolution from Unregistered and Totally Aliased Signals Using Subspace Methods // IEEE Transactions on Signal Processing. 2007. V. 55. № 7. Part 2. P. 3687-3703.
161. Vandewalle P., Susstrunk S., Vetterli M. A frequency domain approach to registration of aliased images with application to super-resolution // EURASIP J. Appl. Signal Process., Special Issue on Super-Resolution Imaging. 2006. P. 1-14.
162. Venkataramani R., Bresler Y. Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-Nyquist Nonuniform sampling of multiband signals // IEEE Trans. Info. Theory. 2000. V. 46. № 6. P. 2173–2183.
163. Venkataramani R., Bresler Y. Sampling theorems for uniform and periodic nonuniform MIMO sampling of multiband signals // Signal Processing, IEEE Transactions. 2003. V. 51. № 12. P. 3152-3163.
164. Verdu S. Multiuser detection. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1998.
165. Vogel C. A Signal Processing View on Time-interleaved ADCs. Analog Circuit Design. Editors: Roermund A.H.M., Casier H., Steyaert M. Springer. 2010. P. 61-78.
166. Vogel C. Modeling, Identification, and Compensation of Channel Mismatch Errors in Time-Interleaved Analog-to-Digital Converters. Doctoral thesis. Graz University of Technology. Austria. 2005. P. 206.
167. Vogel C., Hotz M., Saleem S., Hausmair K., Soudan M. A Review on Low-Complexity Structures and Algorithms for the Correction of Mismatch Errors in Time-Interleaved ADCs // 2012 IEEE 10th International New Circuits and Systems Conference (NEWCAS). Montréal (Canada). 17-20 June 2012. P. 349-352.
168. Vogel C., Koepl H. Behavioral Modeling of Time-Interleaved ADCs using MATLAB // Proceedings of the Austrochip 2003. Linz (Austria). 2003. P. 45-48.
169. Walden R.H. Analog-to-digital converter survey and analysis // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. Apr 1999. V. 17. № 4. P. 539–550.
170. Wojtiuk J.J. Randomized Sampling for Radio Design. PhD Thesis. University of South Australia, School of Electrical and Information Engineering. 2000. P. 160.
171. Xinglei Zhu, Beauregard G.T., Wyse L. Real-Time Signal Estimation From Modified Short-Time Fourier Transform Magnitude Spectra // IEEE Transactions on audio, speech, and language processing. 2007. V. 15. № 5. P. 1645 - 1653.
172. Yen. J. L. On Nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // IRE Transactions on Circuit Theory. 1956. V. CT-3. P. 251–259.
173. Zolghadrasli A. Adaptive Non-Uniform Rate Sampling and Application in Data Compression / International Journal of Information Science and Management (IJISM). 2005. V. 3. № 1. P. 47–56.

Приложение А. Значения SER при восстановлении сигнала №3 в соответствии с алгоритмами № 4,5

Таблица Значение SER при восстановлении периодического сигнала в соответствии с алгоритмами № 4,5 (метод адапт. весов)

Алгоритм восстановления	Тип сглаживающего фильтра / Степень аппроксимирующего полинома	Размер окна фильтра / локальной области	Равномерный ЗРСВ τ_i		Нормальный ЗРСВ τ_i	
			Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER	Среднее значение SER, дБ	Среднеквадратическое отклонение SER
Тривиальный	—	—	28.9	2.2	39.7	1.8
№ 4	Метод скользящего среднего	3	17.9	0.7	19.0	0.2
		5	10.2	0.2	10.5	0.1
		7	5.6	0.1	5.7	0.02
		9	2.7	0.01	2.7	0.01
	МНК полиномом второй степени	3	28.9	2.2	39.7	1.8
		5	27.6	2.0	35.4	1.2
		7	22.7	1.3	25.3	0.4
		9	16.2	0.6	17.0	0.2
	МНК полиномом четвертой степени	5	28.9	2.2	39.7	1.8
		7	28.8	2.2	39.3	1.7
		9	28.1	2.1	37.3	1.4
		11	26.2	1.8	31.8	0.9
№ 5	Вторая	3	15.7	0.9	25.0	0.8
		5	18.6	0.3	25.9	0.7
		7	17.9	0.3	21.4	0.5
		9	14.7	0.2	16.0	0.3
	Третья	5	18.1	0.2	27.6	1.5
		7	18.9	0.3	25.0	0.8
		9	15.9	0.3	17.8	0.4
		11	11.2	0.1	11.8	0.2
	Четвертая	5	16.2	0.4	25.9	2.4
		7	18.4	0.2	28.1	1.2
		9	19.4	0.3	28.5	1.2
		11	19.6	0.4	26.3	0.8

Приложение Б. Результаты точности алгоритмов восстановления дискретных сигналов при их использовании в цифровых системах регистрации сигналов

Таблица 1– Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №3, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	41.9	40.9	40.6	40.4	40.4
4	44.6	46.1	43.4	41.7	40.7
5		46.2	43.6	41.7	40.8
6		43.8	45.5	45.6	44.8
7			44.7	45.3	44.6
8			43.7	44.8	44.6
9				44.2	44.4
10				43.7	44.1
11					43.8
12					43.5

Таблица 2 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №4, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13	15	17	19
3	37.6	25.0	16.5	10.4	6.0	2.7	0.5	0.1
4	44.4	46.1	41.3	31.3	23.1	16.6	11.4	7.2
5		46.1	41.3	31.4	23.1	16.6	11.4	7.3
6		44.4	46.0	46.9	44.7	37.2	29.3	22.5
7			46.0	46.9	44.7	37.3	29.4	22.7
8			44.4	45.8	46.7	47.4	46.8	42.0
9				45.8	46.7	47.4	46.9	42.4
10				44.4	45.6	46.5	47.1	42.4
11					45.6	46.5	47.1	47.7
12					44.4	45.5	46.3	46.9
13						45.5	46.3	46.9
14						44.4	45.4	46.1
15							45.4	46.1
16							44.4	45.3
17								45.3
18								44.4

Таблица 3 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №5, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	37.4	26.0	17.0	10.8	6.2
4	44.2	42.7	34.6	27.1	20.7
5		45.7	42.3	32.2	23.7
6		8.7	36.6	32.7	28.2
7			29.4	33.7	31.6
8			7.1	31.5	29.6
9				21.7	27.6
10				0.1	24.8
11					19.1
12					0.1

Таблица 4 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №3, нормальный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	44.5	43.8	43.5	43.5	43.5
4	47.2	48.2	45.6	44.3	43.7
5		48.3	45.7	44.4	43.8
6		46.6	47.9	47.8	47.0
7			47.2	47.6	46.9
8			46.6	47.2	47.2
9				46.8	47.0
10				46.4	47.0
11					46.5
12					46.3

Таблица 5 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №4, нормальный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13	15	17	19
3	38.1	25.0	16.5	10.4	6.0	2.7	0.5	0.1
4	47.8	49.4	42.1	31.5	23.1	16.6	11.4	7.2
5		49.5	42.1	31.5	23.2	16.6	11.4	7.3
6		47.8	49.5	50.4	46.4	37.6	29.4	22.5
7			49.5	50.4	46.4	37.6	29.5	22.7
8			47.8	49.2	50.2	50.9	49.6	42.9
9				49.2	50.2	50.9	49.6	43.3
10				47.8	49.1	49.9	50.7	51.1
11					49.1	49.9	50.7	51.2
12					47.8	48.9	49.7	50.4
13						48.9	49.7	50.4
14						47.8	48.8	49.6
15							48.8	49.6
16							47.8	48.7
17								48.7
18								47.8

Таблица 6 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе одиночного 8-битного АЦП, в соответствии с алгоритмом №5, нормальный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	37.8	26.0	17.1	10.8	6.2
4	47.4	44.0	34.8	27.1	20.7
5		49.1	43.4	32.4	23.7
6		11.0	37.6	33.1	28.2
7			31.0	34.3	31.6
8			8.2	32.4	29.6
9				21.6	27.9
10				0.1	25.0
11					20.2
12					0.1

Таблица 7 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом №3, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	34.7	34.3	34.4	34.4	34.4
4	32.9	34.4	35.6	35.5	34.4
5		34.4	35.5	35.2	34.4
6		32.8	33.7	33.9	34.7
7			33.2	33.4	33.9
8			32.9	33.1	33.4
9				33.0	33.1
10				32.9	33.0
11					32.9
12					32.8

Таблица 4.8– Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом №4, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13	15	17	19
3	36.4	26.0	17.0	10.8	6.3	3.1	0.8	0.1
4	33.7	36.0	37.7	32.9	23.9	17.0	11.7	7.5
5		36.0	37.7	33.0	23.9	17.1	11.8	7.6
6		33.7	35.4	36.5	37.5	38.2	30.7	23.1
7			35.4	36.5	37.5	38.3	30.8	23.3
8			33.7	35.2	36.0	36.6	37.9	38.9
9				35.2	36.0	36.6	37.8	39.1
10				33.7	35.0	35.7	36.3	36.8
11					35.0	35.6	36.3	36.8
12					33.7	34.9	35.4	36.2
13						34.9	35.4	36.2
14						33.7	34.8	35.3
15							34.8	35.3
16							33.7	34.7
17								34.7
18								33.7

Таблица 4.9 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом №5, равномерный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	35.8	27.8	18.4	11.9	7.3
4	34.6	36.4	34.4	28.4	22.0
5		36.0	38.0	34.5	25.3
6		14.4	28.6	31.5	29.8
7			24.0	30.2	30.3
8			5.8	26.2	28.0
9				18.9	24.9
10				3.3	21.7
11					17.1
12					2.2

Таблица 4.10 – Значение параметра SER при восстановлении ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом № 3, нормальный ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	34.2	34.0	34.0	34.0	34.0
4	32.8	34.4	34.9	34.1	34.0
5		34.4	35.0	34.0	34.0
6		32.7	33.7	34.0	34.1
7			33.1	33.5	33.5
8			32.7	33.1	33.2
9				32.9	33.0
10				32.7	32.9
11					32.8
12					32.7

Таблица 4.11 – Результаты восстановления ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом № 4 при нормальном ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13	15	17	19
3	35.5	24.7	15.5	9.2	4.7	1.5	-0.8	-1.1
4	32.3	35.4	38.3	32.0	22.6	15.6	10.2	5.9
5		35.4	38.3	32.0	22.6	15.6	10.2	6.0
6		32.3	34.7	37.0	37.7	37.7	29.6	21.8
7			34.7	37.0	37.7	37.7	29.8	22.0
8			32.3	34.3	36.0	36.9	38.3	39.5
9				34.3	36.0	36.9	38.3	39.8
10				32.3	34.0	35.4	36.8	37.0
11					34.0	35.4	36.8	37.0
12					32.3	33.8	34.9	36.8
13						33.8	34.8	36.8
14						32.3	33.6	34.5
15							33.6	34.5
16							32.3	33.4
17								33.4
18								32.3

Таблица 4.12 – Результаты восстановления ДС, регистрируемого на выходе системы параллельных 5-битных АЦП, в соответствии с алгоритмом № 5 при нормальном ЗРСВ τ_i

Размер окна Степень полинома	5	7	9	11	13
3	35.0	26.0	16.3	9.8	5.2
4	32.6	35.1	33.0	26.6	19.9
5		34.5	37.8	33.0	23.3
6		13.0	27.6	29.7	27.6
7			21.7	27.5	27.6
8			0.1	22.9	25.3
9				16.7	22.2
10				0.1	18.6
11					14.1
12					0.1

Приложение В. Программный комплекс, используемый в работе

В.1. Код MATLAB, реализующий восстановление дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов, с помощью известных интерполяционных методов

```
% Glava_2_3
close all
clear all
N=100;
T=0.05;
Fmax=2;
F=T*Fmax;
t=(1:N)*T;
t2=(1:2*N)*T/2;
Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
Type_Signal=2; % Тип модельного сигнала
% Исследуемые методы
Method_1=1; % ряд Котельникова
Method_2=1; % Сплаины
Method_3=1; % Адаптивных весов
Method_4=1; % Сфероидальные функции
Method_5=1; % Марвасти
Method_6=1; % Полином Ньютона
Method_7=1; % Полином Лагранжа
Npovt=100;
B=double([isequal(Method_1,1) isequal(Method_2,1) isequal(Method_3,1)
isequal(Method_4,1) isequal(Method_5,1) ...
isequal(Method_6,1) isequal(Method_7,1)]);
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);
SER_5=zeros(Npovt,1);
SER_6=zeros(Npovt,1);
SER_7=zeros(Npovt,1);
N2=length(t2);
fs=zeros(N,N2);
% Вычисляем значения исходного модельного сигнала,
% в узлах равномерной временной сетки
switch Type_Signal
case 1
y1=2*sin(2*pi*Fmax*t2)+1.2*cos(2*pi*t2);
```

```

        case 2
        y1=chirp(t2, 1, 4.75, Fmax);
        case 3
        M=0.9;
        fsign=Fmax;
        fnes=20;
        y1=4+(1+M*cos(fsign*t2)).*(1*cos(fnes*t2+2));
        case 4
        F1=1;
        F2=2;
        y1(1,1:N2/2)=sin(2*pi*F1*t2(1:N2/2));
        y1(1,N2/2+1:N2)=sin(2*pi*F2*t2(N2/2+1:end)-pi);
    end
    sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:)); % мощность исходного ДС
    kJit=0.2:0.2:1; % Задаем диапазон размаха джиттера
    for J=1:length(kJit);
    for m=1:Npovt
        if Dgitter_mode==1
            tau=-T/2+T*rand(1,N);
        end;
        if Dgitter_mode==2
            tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
        end;
        Tau=kJit(J)*tau;
        tp=t+Tau;
        switch Type_Signal
            case 1
            u=2*sin(2*pi*Fmax*tp)+1.2*cos(2*pi*tp);
            case 2
            u=chirp(tp, 1, 4.75, Fmax);
            case 3
            u=4+(1+M*cos(fsign*tp)).*(1*cos(fnes*tp+2));
            case 4
            u=[];
            u(1,1:N/2)=sin(2*pi*F1*tp(1:N/2));
            u(1,N/2+1:length(tp))=sin(2*pi*F2*tp(N/2+1:end)-pi);
        end
        tk_r=t';
        u=u';
        % МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
        if Method_1==1
        %Sinc интерполяция
        for k=1:N
        for n1=1:N2
            fs(k,n1)=sinc(1/T*(t2(n1)-tk_r(k)));
        end
        end
        f1=fs'*u;
        oshibka1=sum(abs(y1-f1').^2)/length(y1-f1');
        SER_1(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka1);
    end

```

```

if Method_2==1
%Сплаины
f2=spline(tk_r,u,t2);
oshibka2=sum(abs(y1-f2).^2)/length(y1-f2);
SER_2(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka2);
end
if Method_3==1
%Адаптивных весов
f3=adaptweight(tk_r',u',t2,Fmax)';
oshibka3=sum(abs(y1-f3).^2)/length(y1-f3);
SER_3(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka3);
end
if Method_4==1
%Сфероидальные функции
f4=method_dpss2(tk_r',u',t2)';
oshibka4=sum(abs(y1-f4).^2)/length(y1-f4);
SER_4(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka4);
end
if Method_5==1
filt = zeros(1, 5*N2);
filt(1: N/10+1) = ones(1, N/10+1);
filt(5*N2- N/10+1: 5*N2) = ones(1, N/10);
iter=25; %число итераций
%Марvasti
f5(1:5*N2)=marvasti(tk_r,u,filt,5*N2/N,iter);
f5(1:N2)=decimate(f5(1:5*N2),5);
oshibka5=sum(abs(y1-f5(1:N2)).^2)/length(y1-f5(1:N2));
SER_5(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka5);
end
if Method_6==1
%Полином Ньютона
f6=local_interp(tk_r,u,t2,5,'N');
oshibka6=sum(abs(y1-f6).^2)/length(y1-f6);
SER_6(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka6);
end
if Method_7==1
%Полином Лагранжа
f7=local_interp(tk_r,u,t2,5,'L');
oshibka7=sum(abs(y1-f7).^2)/length(y1-f7);
SER_7(m,J)=10*log10(sigPower/oshibka7);
end
end; % m
end % J
if Method_1==1
STD_1=std(SER_1);
SER_1=mean(SER_1);
end
if Method_2==1
STD_2=std(SER_2); SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_3==1

```



```

k5=C(5); b(k5)=plot(kJit./2,[SER{k5}],[col{k5}],'LineStyle',[mar{5}],'Marker',[marker{5}]);
hold on,
legend([leg{k1}],[leg{k2}],[leg{k3}],[leg{k4}],[leg{k5}],-1),
case 6
k1=C(1); b(k1)=plot(kJit./2,[SER{k1}],[col{k1}],'LineStyle',[mar{1}],'Marker',[marker{1}]);
hold on,
k2=C(2); b(k2)=plot(kJit./2,[SER{k2}],[col{k2}],'LineStyle',[mar{2}],'Marker',[marker{2}]);
hold on,
k3=C(3); b(k3)=plot(kJit./2,[SER{k3}],[col{k3}],'LineStyle',[mar{3}],'Marker',[marker{3}]);
hold on,
k4=C(4); b(k4)=plot(kJit./2,[SER{k4}],[col{k4}],'LineStyle',[mar{4}],'Marker',[marker{4}]);
hold on,
k5=C(5); b(k5)=plot(kJit./2,[SER{k5}],[col{k5}],'LineStyle',[mar{5}],'Marker',[marker{5}]);
hold on,
k6=C(6); b(k6)=plot(kJit./2,[SER{k6}],[col{k6}],'LineStyle',[mar{6}],'Marker',[marker{6}]);
hold on,
legend([leg{k1}],[leg{k2}],[leg{k3}],[leg{k4}],[leg{k5}],[leg{k6}],-1),
case 7
k1=C(1);
b(k1)=plot(kJit./2,[SER{k1}],[col{k1}],'LineStyle',[mar{1}],'Marker',[marker{1}],'MarkerSize',10); hold on,
k2=C(2);
b(k2)=plot(kJit./2,[SER{k2}],[col{k2}],'LineStyle',[mar{2}],'Marker',[marker{2}],'MarkerSize',10); hold on,
k3=C(3);
b(k3)=plot(kJit./2,[SER{k3}],[col{k3}],'LineStyle',[mar{3}],'Marker',[marker{3}],'MarkerSize',12); hold on,
k4=C(4); b(k4)=plot(kJit./2,[SER{k4}],'color',[0.48 0.06 0.89],'LineStyle',[mar{4}],'Marker',[marker{4}],'MarkerSize',10); hold on,
k5=C(5);
b(k5)=plot(kJit./2,[SER{k5}],[col{k5}],'LineStyle',[mar{5}],'Marker',[marker{5}],'MarkerSize',12); hold on,
k6=C(6);
b(k6)=plot(kJit./2,[SER{k6}],[col{k6}],'LineStyle',[mar{6}],'Marker',[marker{6}],'MarkerSize',10); hold on,
k7=C(7); b(k7)=plot(kJit./2,[SER{k7}],'color',[0.87 0.49 0],'LineStyle',[mar{7}],'Marker',[marker{7}],'MarkerSize',10);
legend([leg{k1}],[leg{k2}],[leg{k3}],[leg{k4}],[leg{k5}],[leg{k6}],[leg{k7}],-1),
end
ylabel('SER,дБ');
grid on

```

```

function z = local_interp(t,u,tt,m,p)
% Входные данные:
% t - имеющиеся неточные значения координат узлов ДС
% u - значения дискретного сигнала в узлах неравномерной сетки
% m - размер локальной области
% p = 1 полином Ньютона; 2 полином Лагранжа
% T - период дискретизации сигнала
T=t(2)-t(1);
k=1;

```



```

z=zeros(1,length(tt));
for i=1+(m-1)/2:length(t)-(m-1)/2
    h=[];g=1;
    while tt(k)<t(1+(m-1)/2) || tt(k)>t(length(t)-(m-1)/2)
        h(g)=k;
        k=k+1;
        g=g+1;
    end
    while tt(k)>=t(i)-T/2 && tt(k)<=t(i)+T/2 && k<length(tt)
        h(g)=k;
        k=k+1;
        g=g+1;
    end
    if p=='N'
        z(h)=newton(t(i-(m-1)/2:i+(m-1)/2),u(i-(m-1)/2:i+(m-1)/2),tt(h));
    elseif p=='L'
        z(h)=lagrange(t(i-(m-1)/2:i+(m-1)/2),u(i-(m-1)/2:i+(m-1)/2),tt(h));
    end
end

function y=adaptweight(tp,yp,t,Fmax)
% adaptweight - функция, возвращающая интерполированные
% значения сигнала в узлах равномерной
% временной сетки,вычисляемые в соответствии
% с методом адаптивных весов
%
% Входные аргументы: tp - вектор, содержащий значения узлов неравномерной
% временной сетки
% yp - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
% неравномерной временной сетки
% t - вектор, содержащий координаты узлов
% равномерной временной сетки
% Fmax - максимальная частота спектра
% восстанавливаемого сигнала
% Выходные величины: y - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
% равномерной временной сетки
% Литература: Н. G. Feichtinger , K. Grochenig and T. Strohmer "Efficient
% numerical methods in non-uniform sampling theory",
% Numer. Math., vol. 69, p.432
% Проверяем входные величины / input check
if size(tp) ~= size(yp)
    error( 'tp and yp must be the same length' )
end
[ m,n ] = size(Fmax);
if ( m ~=1 || n ~= 1 )
    error( 'Fmax must be a scalar' )
end

n=length(tp);
% The adaptive weight value wp of the pth sample
% is calculated as an average distance to the

```

```

% closest sample from each side.

% Адаптивная взвешенная величина  $w_p$   $p$ -го отсчета
% вычисляется как среднее расстояние между соседними
% отсчетами

tp1(2:n+1)=tp;
q=1:n-1;
T_sapmle=mean(tp(q+1)-tp(q));
tp1(1)=tp(1)-T_sapmle; % для создания  $w_p$  той же длины, что и  $tp$ 
tp1(n+2)=tp(n)+T_sapmle; % искусственно создаем еще два отсчета
p=1:n;
wp=1/2*(tp1(p+2)-tp1(p));

% create Toeplitz-type structure of the system matrix
% создаем матрицу Тёплица, она будет использоваться в уравнении  $T*a=b$ 
for k=-Fmax:1:Fmax;
    for L=-Fmax:1:Fmax;
        T(k+Fmax+1,L+Fmax+1)=exp(-2*pi*1i*(k-L)*tp)*wp';
    end
end

% the right side of equation  $T*a = b$ 
% создаем величину  $b$  - вектор правой части уравнения
for k=-Fmax:1:Fmax;
    b(k+Fmax+1,1)=yp.*wp*(exp(-2*pi*1i*k*tp));
end
% solve the equation  $T*a = b$ 
% решаем матричное уравнение
a=T\b;
% The reconstruction result is then given by
% Искомая величина result определяется из уравнения
y=real(exp(1i*2*pi*t*(-Fmax:Fmax))*a(1:(Fmax+Fmax+1),1));

function y=lagrange(tp,yp,t)

% lagrange - функция, возвращающая интерполированные значения сигнала
% в узлах равномерной временной сетки, вычисляемые в соответствии с
% интерполяционной формулой Лагранжа
% Входные аргументы: tp - вектор, содержащий значения узлов неравномерной
% временной сетки
% ur - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
% неравномерной временной сетки
% t - вектор, содержащий координаты узлов
% равномерной временной сетки
% Выходные величины: ur - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
% равномерной временной сетки
N=length(tp);
% создаем нулевой массив значений интерполяционного полинома
y=zeros(size(t));

```

```

% в цикле считаем сумму по узлам
for k=1:N
    % вычисляем произведения
    d=ones(size(t));
    for n=[1:k-1,k+1:N]
        d=d.*(t-tp(n))/(tp(k)-tp(n));
    end
    % накапливаем сумму
    y=y+yp(k)*d;
end

```

```
function y = method_dpss2(tp,yp,t)
```

```

% method_dpss - функция, возвращающая интерполированные значения сигнала
%               в узлах равномерной временной сетки. Метод основывается на дискретных
%               вытянутых сфероидальных волновых функциях

```

```

% Входные аргументы: tp - вектор, содержащий значения узлов неравномерной
%                   временной сетки, размер вектора tp должен быть больше чем 2*K+1;
%                   yp - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%                   неравномерной временной сетки
%                   t - вектор, содержащий координаты узлов
%                   равномерной временной сетки

```

```

% Выходные величины: y - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%                   равномерной временной сетки
% Литература: Seda Senay, Signal Reconstruction From Nonuniform Samples Using
%             Prolate Spheroidal Wave Functions: Theory and Application.
%             Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh.
n=length(tp);
phi=dpss(length(t),0.3*n); % Вычисляем регулярные DPSS / calculating uniform dpss
%(n,8,30)
phi_nonunif=interp1(t,phi,tp,'spline'); % Вычисляем значения дискретных волновых
функций в моменты времени tp
% We calculate values of the discrete wave functions during the moments of time of tp
pseudo=pinv(phi_nonunif); % вычисляем псевдообратную матрицу
gamma_M=yp*pseudo; % вычисляем gamma_M - вектор коэффициентов проекций
неравномерной сетки DPSS на равномерную
% gamma_M is the vector formed by the coefficients resulting from the projection with
respect to the DPSS.
% calculating y
y=phi*gamma_M';

```

```
function y = newton(tp,yp,t)
```

```

% Входные аргументы: tp - вектор, содержащий значения узлов неравномерной
%                   временной сетки
%                   yp - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%                   неравномерной временной сетки
%                   t - вектор, содержащий координаты узлов

```

```

%           равномерной временной сетки
% Выходные величины: y - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%           равномерной временной сетки
N=length(tp);
%вычисляем разделенные разности
d=yр;
for k=1:N-1
    for n=1:N-k
d(n)=(d(n+1)-d(n))/(tp(n+k)-tp(n));
    end
end
%вычисляем значения интерполяционного полинома в точках t
y=d(1)*ones(size(t));
for k=2:N
y=d(k)+(t-tp(k)).*y;
end

function [y,t]=marvasti(tp,yp,filt,L,iter,relax)
% MARVASTI - Функция, возвращающая интерполированные значения сигнала
%           в узлах равномерной временной сетки, вычисляемые в соответствии
%           с итерационным методом Марvasti

% Входные аргументы: tp - вектор, содержащий значения узлов неравномерной
%           временной сетки
%           yp - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%           неравномерной временной сетки
%           filt - фильтр нижних частот
%           L - коэффициент интерполяции, показывающий во сколько
%           раз мы увеличиваем частоту дискретизации при
%           интерполировании length(t)=L*length(tp)
%           iter - максимальное число итераций
%           relax - параметр сходимости
% Выходные величины: y - вектор, содержащий значения сигнала в узлах
%           равномерной временной сетки
%           t - вектор, содержащий координаты узлов
%           равномерной временной сетки. Размер вектора t
%           определяется размером filt
% Литература: [1] H.Feichtinger and K.Groechenig: Theory and Practice of
%           irregular sampling. In Benedetto J. and Frazier M., editors,
%           Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, pp. 305-363,
%           1993.
%           [2] T. Strohmer, Efficient methods for digital signal and image
%           reconstruction from nonuniform samples, PhD. Thesis,
%           Univ. Vienna, 1993
% Проверка входных параметров
if nargin < 4
    error('not enough input arguments')
end
n = length(filt);
lxp = length(tp);
if nargin < 6

```

```

    relax = 0.8*n/lxp;
end
if nargin < 5
    iter = length(xp);
end
filt = filt(:).';
yp = yp(:).';
d=length(tp);
N=L*d;
%определяем период следования отсчетов
nr=1:length(tp)-1;
raz=tp(nr+1)-tp(nr);
raz=mean(raz);
T=raz;
t=(1:d*L)*T/L; % Формируем равномерную сетку
F=t;
% Определяем координаты на равномерной сетке, к которым ближе всего
располагаются значения tp
D=zeros(N,d);
for nr=1:d
    for k=1:N
        D(k,nr)=(tp(nr)-F(k));
    end
end
% B -вектор показывающий номера положений tp на равномерной сетке
[~,B]=min(abs(D));
y = zeros(1,n);
% начало итераций
j = 1;
while j < iter
    xd = zeros(1,n);
    xd(B) = yp - y(B);
    y = relax*ifft(filt.*fft(xd)) + y;
    j = j+1;
end
if isreal(yp)
    y = real(y);
end;

```

В.2. Код MATLAB, реализующий восстановление дискретных сигналов с помощью оптимизационных алгоритмов оценивания координат узлов временной сетки

```
% Glava_2_4_Brown1
% Выходные данные - значения целевой функции:
% 1 метод
% C2_0 - tp0 - истинные координаты SER3
% C2_1 - iT – равномерная сетка SER0
% C2_2 - x - вычисляемые координаты SER2
% 2 метод
% Res0 - tp0 - истинные координаты
% Res_iT – равномерная сетка
% Res2 - x - вычисляемые координаты
close all
clear;
Signal_Type=1;
Browning=2
Npovt=50;
if Signal_Type==1
fw=[1.75 3.5]; % частота сигнала в Гц
Am=[1.2 2];% амплитуда сигнала
phi=[pi/2 0]; % начальные фазы гармоник
Ts=0.9;
elseif Signal_Type==2
fw=[3 5 6 9]; % частота сигнала в Гц
phi=[pi/2 pi/2 pi/2 pi/2]; % начальные фазы гармоник
Am=[0.25 0.265 0.26 0.25];
Ts=1;% длительность интервала анализа
end
Np=32;
T=Ts/(Np-1);
x=0:T:Ts;
N2=128;
T2=max(x)/(N2-1);
x1=0:T2:max(x);
tp0=zeros(1,Np);
tp0(1)=x(1);
tp0(Np)=x(Np);
SER_22=zeros(1,Npovt);
SER_00=zeros(1,Npovt);
for mk=1:Npovt
    x=0:T:Ts;
    n=2;
    while (n<=Np-1)
        Tmp=(-T/2+T*rand(1,1));
        if n*T+Tmp<max(x(Np))
            tp0(n)=(n-1)*T+Tmp;
```

```

        n=n+1;
    end;
end;
for i=1:length(fw)
u(i,:)=Am(i)*sin(fw(i)*2*pi*tp0+phi(i)); y1(i,:)=Am(i)*sin(fw(i)*2*pi*x1+phi(i)); end
u=sum(u);
y1=sum(y1);
% Browning 1
if Browning ==1
s0=spline(tp0,u,x1);
s00=spline(x,u,x1);
t2=0:T/5:Ts;
n=length(u);
u0=interp1((0:n-1)*T,u,t2,'spline');
fd=1/T2; % частота дискретизации
S0=abs(fft(s0,N2));
Sy1=abs(fft(u0,N2));
Sy2=abs(fft(s00,N2));
S0=2*S0./N2;% Нормировка спектра по амплитуде
S0(1)=S0(1)/2;%
Sy1=2*Sy1/N2;
Sy1(1)=Sy1(1)/2;
Sy2=2*Sy2/N2;
Sy2(1)=Sy2(1)/2;
j=2:N2;
plot((j-1)/N2*fd,Sy1(j),(j-1)/N2*fd,S0(j),(j-1)/N2*fd,Sy2(j))
Fmax=fw(2);
L=ceil(Fmax/fd*N2);
L=L+1;
C2_1(mk)=sum(abs(Sy1(L:N2-L)).^2); % iT
C2_2(mk)=sum(abs(Sy2(L:N2-L)).^2); % x
C2_0(mk)=sum(abs(S0(L:N2-L)).^2); % tp0
DeltaT=10^-4;
F(1)=C2_2(mk);
x2=x;
for i=1:1000
    for m=2:Np-1
        Tmp=(-T/4+T/2*rand(1,1));
        x2(m)=x(m)-Tmp;
        s00=spline(x2,u,x1);
        Sy2=abs(fft(s00,N2));
        Sy2=2*Sy2/N2;
        Sy2(1)=Sy2(1)/2;
        C_0=sum(abs(Sy2(L:N2-L)).^2);
        if C_0<C2_2(mk)
            C2_2(mk)=C_0;
            x=x2;
        end;
        R(i)=sum((x-tp0).^2);
        F(i)=C2_2(mk);
    end;
end;

```

```

end;
end
% Browning 2
if Browning ==2
Sy1=abs(fft(y1));
Sy1=2*Sy1/Np;
Sy1(1)=Sy1(1)/2;
j=2:Np;
fd=1/T;
Fmax=max(fw);
L=ceil(Fmax/fd*Np);
L=L+1;
M=zeros(Np,2*L+1);
for p=1:Np
    for q=-L:L
        M(p,q+L+1)=exp(-1i*2*pi*tp0(p)/Ts*q);
    end;
end;
a=M\u'; % решаем систему уравнений (3) из второй статьи
Res_0(mk)=sum(abs(u'-M*a));
DeltaT=10^-4;
M=zeros(Np,2*L+1);
for p=1:Np
    for q=-L:L
        M(p,q+L+1)=exp(-1i*2*pi*x(p)/Ts*q);
    end;
end;
a=M\u'; % решаем систему уравнений (3) из второй статьи
Res=sum(abs(u'-M*a)); % вычисляем остатки аппроксимации
F(1)=Res;
x2=x;
Res iT(mk)=Res;
for i=1:1000
    for m=1:Np
        Tmp=(-T/4+T/2*rand(1,1));
        x2(m)=x(m)-Tmp;
        for p=1:Np
            for q=-L:L
                M(p,q+L+1)=exp(-1i*2*pi*x2(p)/Ts*q);
            end;
        end;
        a=M\u'; % решаем систему уравнений (3) из второй статьи
        Res1=sum(abs(u'-M*a)); % вычисляем остатки аппроксимации
        if Res1<Res
            Res=Res1;
            x=x2;
        end;
        F(i+1)=Res;
    end;
end;
end;
Res2(mk)=Res;

```



```

end
%KOEII Browning 2
t2=0:T/5:Ts;
for i=1:length(fw)
    y11(i,:)=Am(i)*sin(fw(i)*2*pi*t2+phi(i)); %
end
y11=sum(y11);
sigPower=sum(abs(y11(:)).^2)/length(y11(:));
u2=interp1(x,u,t2,'spline');
oshibka_2=sum(abs(y11-u2).^2)/length(y11-u2);
SER_22(mk)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
n=length(u);
u0=interp1((0:n-1)*T,u,t2,'spline');
oshibka_0=sum(abs(y11-u0).^2)/length(y11-u0);
SER_00(mk)=10*log10(sigPower/oshibka_0);
u3=interp1(tp0,u,t2,'spline');
oshibka_3=sum(abs(y11-u3).^2)/length(y11-u3);
SER_33(mk)=10*log10(sigPower/oshibka_3);
end
STD_0=std(SER_00); STD_2=std(SER_22);
STD_3=std(SER_33); SER_2=mean(SER_22);
SER_0=mean(SER_00); SER_3=mean(SER_33);
if Browning==1
    B_std_tp0=std(C2_0); B_std iT=std(C2_1);
    B_std_x=std(C2_2); A_tp0=mean(C2_0);
    A iT=mean(C2_1); A_x=mean(C2_2);
end
if Browning==2
    B_std_tp0=std(Res_0); B_std iT=std(Res iT);
    B_std_x=std(Res2); A_tp0=mean(Res_0);
    A iT=mean(Res iT); A_x=mean(Res2);
end
subplot(2,1,1)
plot(t2,y11)
subplot(2,1,2)
stem((j-1)/N2*fd,Sy1(j))

```

В.3. Программный комплекс, используемый в Главе 3

Г.1. Код MATLAB, реализующий восстановление дискретных сигналов в соответствии с разработанными алгоритмами №1-3

```
% Glava_3_3
% вычисление точности алгоритмов №1,2,3 для периодического сигнала
clear all
N=100;
T=0.05;
Fmax=2;
F=T*Fmax;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
Method_1=1; % применять метод №1
Method_2=1; % применять метод №2
Method_3=1; % применять метод №3
Npovt=100;
NTrial=1000;
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);
Np=length(t2);
Nb=length(t);
N2=Np;
Z=zeros(NTrial,Nb);
y1=2*sin(2*pi*Fmax*t2)+1.2*cos(2*pi*t2);
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
for m=1:Npovt
    if Dgitter_mode==1
        tau=-T/2+T*rand(1,N);
    end;
    if Dgitter_mode==2
        tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
    end;
    u=2*sin(2*pi*Fmax*(t+tau))+1.2*cos(2*pi*(t+tau));
    tp=t+tau;
    %% Тривиальный алгоритм
    u1=interp1(t,u,t2,'spline');
    oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
    SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
    %% Алгоритм №1
    if Method_1==1
        for i=1:NTrial
            if Dgitter_mode==1
                tau=-T/2+T*rand(1,N);
            end;
```

```

if Dgitter_mode==2
    tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
end;
tau=tau/1.5;
Z(i,1:Np)=interp1(t+tau,u,t2,'spline');
end;
for i=1:Np
    Sum=0;
    k=0;
    iz=isnan(Z(:,i));
    for g=1:NTrial
        if ~(iz(g)==1)
            Sum=Sum+Z(g,i);
            k=k+1;
        end;
    end;
    u2(i)=Sum/k;
end;
oshibka_2=sum(abs(y1-u2).^2)/length(y1-u2);
SER_2(m)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
end % method 1
%% Алгоритм №2
if Method_2==1
    Z1=interp1(t,u,t+T/(3*sqrt(12)),'spline');
    Z2=interp1(t,u,t-T/(3*sqrt(12)),'spline');
    z1=abs(Z1-u);
    z2=abs(Z2-u);
    for v=1:Nb
        if z1(v)<=z2(v)
            Ts(v)=1;
        else
            Ts(v)=-1;
        end;
    end;
end;
c=1;
for c=1:100
    r=1;
    while r<=Nb
        if Dgitter_mode==1
            Tau1=-T/2+T*rand(1,1);
        end;
        if Dgitter_mode==2
            Tau1 = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,1);
        end;

        if sign(Ts(r))==sign(Tau1)
            Tau(r)=Tau1;
            r=r+1;
        end;
    end
end

```

```

Tau=Tau/1.5;
ZZ(c,1:Np)=interp1(t+Tau,u,t2,'spline');
end %c
u3=mean(ZZ);
oshibka_3=sum(abs(y1-u3).^2)/length(y1-u3);
SER_3(m)=10*log10(sigPower/oshibka_3);
end % method 2
%% Алгоритм №3
if Method_3==1
tm=t;
for n=1:5;
tk=local_appr(tm,u,7,5,T/3);
for h=1:length(tk)-1
    if tk(h+1)-tk(h)<0
        s=tk(h);
        tk(h)=tk(h+1);
        tk(h+1)=s;
    end
    if tk(h+1)-tk(h)==0
        tk(h+1)=tk(h+1)+0.02;
    end
end
tm=tk;
end
for j=1:length(tk)
if tk(j)-t(j)>T/2
    tk(j)=t(j)+T/2;
elseif tk(j)-t(j)<-T/2
    tk(j)=t(j)-T/2;
end
end
for h=1:length(tk)-1
if tk(h+1)-tk(h)==0
    tk(h+1)=tk(h)+0.05;
end
end
u4=interp1(tk,u,t2,'spline');
oshibka_4=sum(abs(y1-u4).^2)/length(y1-u4);
SER_4(m)=10*log10(sigPower/oshibka_4);
end % method 3
end; %m
STD_1=std(SER_1);
SER_1=mean(SER_1);
if Method_1==1
STD_2=std(SER_2);
SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_2==1
STD_3=std(SER_3);
SER_3=mean(SER_3);
end

```

```

if Method_3==1
STD_4=std(SER_4);
SER_4=mean(SER_4);
end

```

В.4. Код MATLAB, реализующий восстановление дискретных сигналов в соответствии с разработанными алгоритмами №4,5

```

% Glava_3_4

clear all
N=100;
T=0.05;
Fmax=2;
F=T*Fmax;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
Method_2=1; % применять метод №4
Method_3=1; % применять метод №5
Npovt=100;
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);
y1=2*sin(2*pi*Fmax*t2)+1.2*cos(2*pi*t2);
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
for m=1:Npovt
    if Dgitter_mode==1
        tau=-T/2+T*rand(1,N);
    end;
    if Dgitter_mode==2
        tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
    end;
    tp=t+tau;
    u=2*sin(2*pi*Fmax*(t+tau))+1.2*cos(2*pi*(t+tau));
    u1=interp1(t,u,t2,'spline');
    oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
    SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
    if Method_2==1
        Z1=interp1(t+T/(3*sqrt(12)),u,t2,'spline');
        Z2=interp1(t-T/(3*sqrt(12)),u,t2,'spline');
        u2=0.5*(Z1+Z2);
        oshibka_2=sum(abs(y1-u2).^2)/length(y1-u2);
        SER_2(m)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
    end
    M=3:2:19; % окна фильтра
    G=[1 1 3 5 7 9 11 13 15];
    if Method_3==1

```

```

for i=1:length(M) % число окон фильтра
    for p=1:M(i)-1 % степень полинома
        sg(:,p,i)=sgolayfilt(u,p,M(i));
        u_sg(:,p,i)=interp1(t,sg(:,p,i),t2,'spline');
        oshibka_3(p,i)=sum(abs(y1'-u_sg(:,p,i)).^2)/length(y1'-u_sg(:,p,i));
        SER_3(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_3(p,i));
        ap(:,p,i)=locappr(t,u,t2,M(i),p);
        oshibka_4(p,i)=sum(abs(y1'-ap(:,p,i)).^2)/length(y1'-ap(:,p,i));
        SER_4(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_4(p,i));
    end
end
end
end; % m
STD_1=std(SER_1); SER_1=mean(SER_1);
if Method_2==1
STD_2=std(SER_2); SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_3==1
STD_3=std(SER_3); STD_3=reshape(STD_3,p,i);
SER_3=mean(SER_3); SER_3=reshape(SER_3,p,i);
STD_4=std(SER_4); STD_4=reshape(STD_4,p,i);
SER_4=mean(SER_4); SER_4=reshape(SER_4,p,i);
end

```

В.5. Код MATLAB, реализующий восстановление ДС, образованного
одиночным высокоскоростным 8 битным АЦП на основе КМОП-
технологии 0.18 мкм

```

% Glava_4_1_A
% Вычисление значений параметра SER в соответствии с алгоритмами
№1,2,3
% Выходные данные:
% SNR_1 - восстановление сигнала непосредственно по таблице (iT,u) % методом
кубической сплайн интерполяции при обычной дискретизации % с джиттером;
% SNR_2 - восстановление сигнала методом №1 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_3 - восстановление сигнала методом №2 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_4 - восстановление сигнала методом №3 при обычной дискретизации с
джиттером;
close all
clear
N=1000;
Fd=20.3*10^9;
T=1/Fd;
Fmax=2*10^9;
A=0.25/2;
F=T*Fmax;

```

```

Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
               % 2 - нормальный закон распределения джиттера
Ymin=-0.25/2;
Ymax=0.25/2;
Method_2=1; % применять алгоритм №1
Method_3=1; % применять алгоритм №2
Method_4=1; % применять алгоритм №3
b=8; % число бит АЦП
DNL=0.3;
C=1;
Npovt=100;
NTrial=1000;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
y1=A*sin(Fmax*2*pi*t2);
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);

Np=length(t2);
Nb=length(t);
Z=zeros(NTrial,Nb);
for m=1:Npovt % статистические испытания
    if Dgitter_mode==1
        tau=-T/2+T*rand(1,N);
    end
    if Dgitter_mode==2
        tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
    end
    if Dgitter_mode==3
        tau=tau/35;
    else
        tau=tau/20;
    end
    tp=t+tau;
    u=A*sin(Fmax*2*pi*tp);
    if C==1
        u_n=u+randn(1,length(u))*sqrt((1.3806488*10^(-23))*296/(5*10^(-12)));
    end
    if C~=1
        u_n=u;
    end
    del=(Ymax-Ymin)./2^b;
    del2=del+del.*(-DNL+2*DNL*rand(1,2^b));
    for v=1:length(u)
        rou=round((u_n(v)- Ymin)./del);
        if rou~=0
            u_kv(v)= Ymin +(rou-1)*del+del2(rou);
        else

```

```

        u_kv(v)= Ymin;
    end
end
u1=interp1(t,u_kv,t2,'spline');
oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
if Method_2==1
for i=1:NTrial
    if Dgitter_mode==1
        tauM=-T/2+T*rand(1,N);
    end;
    if Dgitter_mode==2
        tauM = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
    end;
    if Dgitter_mode==1
tauM=tauM/35;
    else
tauM=tauM/25;
    end
    Z(i,1:Np)=interp1(t+tauM,u_kv,t2,'spline');
end;
for i=1:Np
    Sum=0;
    k=0;
    iz=isnan(Z(:,i));
    for g=1:NTrial
        if ~(iz(g)==1)
            Sum=Sum+Z(g,i);
            k=k+1;
        end;
    end;
    u2(i)=Sum/k;
end;
oshibka_2=sum(abs(y1-u2).^2)/length(y1-u2);
SER_2(m)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
end
if Method_3==1
Z1=interp1(t,u_kv,t+T/2,'spline');
Z2=interp1(t,u_kv,t-T/2,'spline');
z1=abs(Z1-u_kv);
z2=abs(Z2-u_kv);
for v=1:Nb
    if z1(v)<=z2(v)
        Ts(v)=1;
    else
        Ts(v)=-1;
    end;
end;
for v=1:N
    if sign(tau(v))==Ts(v)
        B(v)=1;
    end;
end;

```



```

else
    B(v)=0;
end
end
Proc(m)=sum(B)/N;
c=1;
for c=1:4
    r=1;
    while r<=Nb
        if Dgitter_mode==1
            Tau1=-T/2+T*rand(1,1);
        end;
        if Dgitter_mode==2
            Tau1 = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,1);
        end;
        if sign(Ts(r))==sign(Tau1)
            Tau(r)=Tau1;
            r=r+1;
        end;
    end
    Tau=Tau/200;
    ZZ(c,1:Np)=interp1(t+Tau,u_kv,t2,'spline');
end %c
u3=mean(ZZ);
oshibka_3=sum(abs(y1-u3).^2)/length(y1-u3);
SER_3(m)=10*log10(sigPower/oshibka_3);
end
M=5:2:13; % окна фильтра
G=[1 2 4 4 1 3 5 7 9];
if Method_4==1;
for i=1:length(M) % число окон фильтра
    for p=3:M(i)-1
        tm=t;
        for nn=1:5;
            if Dgitter_mode==1
                tk2=local_appr(tm,u_kv,M(i),p,T/200);
            else
                tk2=local_appr(tm,u_kv,M(i),p,T/300);
            end
            for h=1:length(tk2)-1
                if tk2(h+1)-tk2(h)<0
                    s=tk2(h);
                    tk2(h)=tk2(h+1);
                    tk2(h+1)=s;
                end
                if tk2(h+1)-tk2(h)==0
                    tk2(h+1)=tk2(h+1)+T/3/50;
                end
            end
        end
        tm=tk2;
    end
end

```

```

u4=interp1(tm,u_kv,t2,'spline');
oshibka_4=sum(abs(y1-u4).^2)/length(y1-u4);
SER_4(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_4);
    end % p
end % i
end
end % m
STD_1=std(SER_1); SER_1=mean(SER_1);
if Method_2==1
STD_2=std(SER_2); SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_3==1
STD_3=std(SER_3); SER_3=mean(SER_3);
end
if Method_4==1
STD_4=std(SER_4); STD_4=reshape(STD_4,p,i);
end

% Glava_4_1_B
% Вычисление значений параметра SER в соответствии с алгоритмами
№4,5
% Выходные данные:
% SNR_1 - восстановление сигнала непосредственно по таблице (iT,u) % методом
кубической сплайн интерполяции при обычной дискретизации % с джиттером;
% SNR_3 - восстановление сигнала методом №4 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_4 - восстановление сигнала методом №5 при обычной дискретизации с
джиттером;
close all
clear
N=1000;
Fd=20.1*10^9;
T=1/Fd;
Fmax=2*10^9;
A=0.25/2;
F=T*Fmax;
Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
Ymin=-0.25/2;
Ymax=0.25/2;
Method_4=1; % применять алгоритм №4
Method_5=1; % применять алгоритм №5
b=8; % число бит АЦП
DNL=0.3;
C=1;
Npovt=100;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
y1=A*sin(Fmax*2*pi*t2);
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
SER_1=zeros(Npovt,1);

```

```

SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);
Np=length(t2);
Nb=length(t);
for m=1:Npovt % статистические испытания
if Dgitter_mode==1
    tau=-T/2+T*rand(1,N);
end;
if Dgitter_mode==2
    tau = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,N);
end
if Dgitter_mode==1
    tau=tau/35;
else
    tau=tau/25;
end
tp=t+tau;
u=A*sin(Fmax*2*pi*tp);
if C==1
    u_n=u+randn(1,length(u))*sqrt((1.3806488*10^(-23))*296/(5*10^-12));
end
if C~=1
    u_n=u;
end
del=(Ymax- Ymin)./2^b;
del2=del+del.*(-DNL+2*DNL*rand(1,2^b));
for v=1:length(u)
    rou=round((u_n(v)- Ymin)./del);
    if rou~=0
        u_kv(v)= Ymin +(rou-1)*del+del2(rou);
    else
        u_kv(v)= Ymin;
    end
end
u1=interp1(t,u_kv,t2,'spline');
oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
M=5:2:19; % окна фильтра
G=[7 7 1 1 1 3 5 7 9];
if Method_4==1
for i=1:length(M) % число окон фильтра
    for p=3:M(i)-1 % степень полинома
        sg(:,p,i)=sgolayfilt(u_kv,p,M(i)); u_sg(:,p,i)=interp1(t,sg(:,p,i),t2,'spline');
oshibka_3(p,i)=sum(abs(y1'-u_sg(:,p,i)).^2)/length(y1'-u_sg(:,p,i));
SER_3(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_3(p,i));
        end % p
    end %i
end
M=5:2:13; % окна фильтра
G=[1 2 1 1 1 3 5 7 9];
if Method_5==1

```

```

for i2=1:length(M) % число окон фильтра
    for p2=3:M(i2)-1 % степень полинома
        ap(:,p2,i2)=locappr(t,u_kv,t2,M(i2),p2);
    oshibka_4(p2,i2)=sum(abs(y1'-ap(:,p2,i2)).^2)/length(y1'-ap(:,p2,i2));
    SER_4(m,p2,i2)=10*log10(sigPower/oshibka_4(p2,i2));
    end % p
end % i
end
end; % m
STD_1=std(SER_1); SER_1=mean(SER_1);
if Method_4==1
    STD_3=std(SER_3); STD_3=reshape(STD_3,p,i);
    SER_3=mean(SER_3); SER_3=reshape(SER_3,p,i);
end
if Method_5==1
    STD_4=std(SER_4); STD_4=reshape(STD_4,p2,i2);
    SER_4=mean(SER_4); SER_4=reshape(SER_4,p2,i2);
end

```

В.6. Код MATLAB, реализующий восстановление ДС, получаемого на выходе системы 8 параллельных 5-ти битных АЦП на основе КМОП-технологии 65 нм

```

% Glava_4_2_A
% Вычисление значений параметра SER в соответствии с алгоритмами
№1,2,3
% Выходные данные:
% SNR_1 - восстановление сигнала непосредственно по таблице (iT,u) % методом
кубической сплайн интерполяции при обычной дискретизации % с джиттером;
% SNR_2 - восстановление сигнала методом №1 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_3 - восстановление сигнала методом №2 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_4 - восстановление сигнала методом №3 при обычной дискретизации с
джиттером;

close all
clear
N=960;
Fd=12*10^9;
T=1/Fd;
Fmax=1.2*10^9;
A=0.59/2;
F=T*Fmax;
Dgitter_mode=1; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
recur=1;
Method_1=1; % применять метод №1

```

```

Method_2=1; % применять метод №2
Method_3=1; % применять метод №3
Method_4=1;
b=5; % число бит АЦП
C=1;
DNL=0.5;
Npovt=100;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
y1=A*sin(Fmax*2*pi*t2);
NTrial=1000;
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
Np=length(t2);
Nb=length(t);
Z=zeros(NTrial,Nb);
k=8; % размер группы отсчетов рекуррентной дискретизации
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
SER_4=zeros(Npovt,1);
for m=1:Npovt % статистические испытания
if Dgitter_mode==1
    tau0=-T/2+T*rand(1,k);
    for i=1:k:N
        tau(i:i+(k-1))=tau0;
    end
    tau=tau/45;
end;
if Dgitter_mode==2
    tau0 = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,k);
    for i=1:k:N
        tau(i:i+(k-1))=tau0;
    end
    tau=tau/15;
end
tp=t+tau;
u=A*sin(Fmax*2*pi*tp);
if C==1
    u_n=u+randn(1,length(u))*sqrt((1.3806488*10^(-23))*296/(5*10^(-12)));
end
if C~=1
    u_n=u;
end
Ymax=max(u_n);
Ymin=min(u_n);
del=(Ymax-Ymin)./2^b;
del2=del+del.*(-DNL+2*DNL*rand(1,2^b));
for v=1:length(u)
    rou=round((u_n(v)-Ymin)./del);
    if rou~=0
        u_kv(v)=Ymin+(rou-1)*del+del2(rou);
    end
end

```

```

else
    u_kv(v)=Ymin;
end
end
u1=interp1(t,u_kv,t2,'spline');
oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
if Method_2==1
for i=1:NTrial
    if Dgitter_mode==1
        tau0M=-T/2+T*rand(1,k);
        for s=1:k:N
            tauM(s:s+(k-1))=tau0M;
        end
tauM=tauM/45;
    end;
    if Dgitter_mode==2
        tau0M = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,k);
        for s=1:k:N
            tauM(s:s+(k-1))=tau0M;
        end
tauM=tauM/15;
    end;
    Z(i,1:Np)=interp1(t+tauM,u_kv,t2,'spline');
end;
for i=1:Np
    Sum=0;
    kk=0;
    iz=isnan(Z(:,i));
    for g=1:NTrial
        if ~(iz(g)==1)
            Sum=Sum+Z(g,i);
            kk=kk+1;
        end;
    end;
    u2(i)=Sum/kk;
end;
oshibka_2=sum(abs(y1-u2).^2)/length(y1-u2);
SER_2(m)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
end
if Method_3==1

Z1=interp1(t,u_kv,t+T/(3*sqrt(12)),'spline');
Z2=interp1(t,u_kv,t-T/(3*sqrt(12)),'spline');
z1=abs(Z1-u_kv);
z2=abs(Z2-u_kv);
for v=1:Nb
    if z1(v)<=z2(v)
        Ts(v)=1;
    else
        Ts(v)=-1;
    end
end

```

```

        end;
    end;
    for v=1:N
    if sign(tau(v))==Ts(v)
        B(v)=1;
    else
        B(v)=0;
    end
    end
    Proc(m)=sum(B)/N;
    c=1;
    for c=1:4
        r=1;
        while r<=Nb
            if Dgitter_mode==1
                Tau1=-T/2+T*rand(1,1);
            end;
            if Dgitter_mode==2
                Tau1 = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,1);
            end;
            if sign(Ts(r))==sign(Tau1)
                Tau(r)=Tau1;
                r=r+1;
            end;
        end
    end
    if Dgitter_mode==1
        Tau=Tau/75;
    else
        Tau=Tau/21;
    end
    ZZ(c,1:Np)=interp1(t+Tau,u_kv,t2,'spline');
    end %c
    u3=mean(ZZ);
    oshibka_3=sum(abs(y1-u3).^2)/length(y1-u3);
    SER_3(m)=10*log10(sigPower/oshibka_3);
    end
    M=5:2:13; % окна фильтра
    G=[1 2 4 4 1 3 5 7 9];
    if Method_4==1;
    for i=1:length(M) % число окон фильтра
        for p=3:M(i)-1
            tm=t;
            for nn=1:5;
                if Dgitter_mode==1
                    tk2=local_appr(tm,u_kv,M(i),p,T/200);
                else
                    tk2=local_appr(tm,u_kv,M(i),p,T/300);
                end
            end
            for h=1:length(tk2)-1
                if tk2(h+1)-tk2(h)<0
                    s=tk2(h);

```

```

        tk2(h)=tk2(h+1);
        tk2(h+1)=s;
    end
    if tk2(h+1)-tk2(h)==0
        tk2(h+1)=tk2(h+1)+T/3/50;
    end
end
tm=tk2;
end
u4=interp1(tm,u_kv,t2,'spline');
oshibka_4=sum(abs(y1-u4).^2)/length(y1-u4);
SER_4(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_4);
    end % p
end % i
end
end % m
STD_1=std(SER_1); SER_1=mean(SER_1);
if Method_2==1
STD_2=std(SER_2); SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_3==1
STD_3=std(SER_3); SER_3=mean(SER_3);
end
if Method_4==1
STD_4=std(SER_4); STD_4=reshape(STD_4,p,i);
SER_4=mean(SER_4); SER_4=reshape(SER_4,p,i);
end

% Glava_4_2_B

% Вычисление значений параметра SER в соответствии с алгоритмами
№4,5
% Выходные данные:
% SNR_1 - восстановление сигнала непосредственно по таблице (iT,u) % методом
кубической сплайн интерполяции при обычной дискретизации % с джиттером;
% SNR_3 - восстановление сигнала методом №4 при обычной дискретизации с
джиттером;
% SNR_4 - восстановление сигнала методом №5 при обычной дискретизации с
джиттером;
close all
clear
N=960;
Fd=12*10^9;
T=1/Fd;
Fmax=1.2*10^9;
A=0.59/2;
F=T*Fmax;
Dgitter_mode=2; % 1 - равномерный закон распределения джиттера
                % 2 - нормальный закон распределения джиттера
recur=1; % считать SNR для случая рекуррентной дискретизации
Method_1=1; % применять метод №1

```



```

Method_2=0; % применять метод №2
Method_3=1; % применять метод №3
Method_4=1;
b=5; % число бит АЦП
C=1;
DNL=0.5;
Npovt=100;
t=(1:N)*T;
t2=(10:2*N-10)*T/2;
y1=A*sin(Fmax*2*pi*t2);
NTrial=1000;
sigPower=sum(abs(y1(:)).^2)/length(y1(:));
Np=length(t2);
Nb=length(t);
Z=zeros(NTrial,Nb);
k=8; % размер группы отсчетов рекуррентной дискретизации
M=3:2:15; % окна фильтра
SER_1=zeros(Npovt,1);
SER_2=zeros(Npovt,1);
SER_3=zeros(Npovt,1);
for m=1:Npovt % статистические испытания
if Dgitter_mode==1
    tau0=-T/2+T*rand(1,k);
    for i=1:k:N
        tau(i:i+(k-1))=tau0;
    end
    tau=tau/45;
end;
if Dgitter_mode==2
    tau0 = 0 + T/(3*sqrt(12))*randn(1,k);
    for i=1:k:N
        tau(i:i+(k-1))=tau0;
    end %
    tau=tau/15;
end
tp=t+tau; % координаты обычной дискретизации
u=A*sin(Fmax*2*pi*tp); % значения сигнала на неравномерной сетке
if C==1
    u_n=u+randn(1,length(u))*sqrt((1.3806488*10^(-23))*296/(5*10^(-12)));
end
if C~=1
    u_n=u;
end
Ymax=max(u_n);
Ymin=min(u_n);
del=(Ymax-Ymin)./2^b;
del2=del+del.*(-DNL+2*DNL*rand(1,2^b));
for v=1:length(u)
    rou=round((u_n(v)-Ymin)./del);
    if rou~=0
        u_kv(v)=Ymin+(rou-1)*del+del2(rou);
    end
end

```

```

else
    u_kv(v)=Ymin;
end
end
u1=interp1(t,u_kv,t2,'spline');
oshibka_1=sum(abs(y1-u1).^2)/length(y1-u1);
SER_1(m)=10*log10(sigPower/oshibka_1);
if Method_2==1
    Z1=interp1(t+T/70,u_kv,t2,'spline');
    Z2=interp1(t-T/70,u_kv,t2,'spline');
    u2=0.5*(Z1+Z2);
    oshibka_2=sum(abs(y1-u2).^2)/length(y1-u2);
    SER_2(m)=10*log10(sigPower/oshibka_2);
end
M=17:2:19; % окна фильтра
G=[5 7 1 1 1 5 5 7 9];
if Method_3==1
    for i=1:length(M) % число окон фильтра
        for p=7:M(i)-G(i) % степень полинома
            sg(:,p,i)=sgolayfilt(u_kv,p,M(i));
            u_sg(:,p,i)=interp1(t,sg(:,p,i),t2,'spline');
            oshibka_3(p,i)=sum(abs(y1'-u_sg(:,p,i)).^2)/length(y1'-u_sg(:,p,i));
            SER_3(m,p,i)=10*log10(sigPower/oshibka_3(p,i));
        end % p
    end % i
end
M=5:2:9; % окна фильтра
G=[2 2 4 4 1 3 5 7 9];
if Method_4==1
    for i2=1:length(M) % число окон фильтра
        for p2=3:M(i2)-G(i2) % степень полинома
            ap(:,p2,i2)=locapppr(t,u_kv,t2,M(i2),p2);
            oshibka_4(p2,i2)=sum(abs(y1'-ap(:,p2,i2)).^2)/length(y1'-ap(:,p2,i2));
            SER_4(m,p2,i2)=10*log10(sigPower/oshibka_4(p2,i2));
        end % p
    end % i
end
end; % m
STD_1=std(SER_1); SER_1=mean(SER_1);
if Method_2==1
    STD_2=std(SER_2); SER_2=mean(SER_2);
end
if Method_3==1
    STD_3=std(SER_3); STD_3=reshape(STD_3,p,i);
    SER_3=mean(SER_3); SER_3=reshape(SER_3,p,i);
end
if Method_4==1
    STD_4=std(SER_4); STD_4=reshape(STD_4,p2,i2);
    SER_4=mean(SER_4); SER_4=reshape(SER_4,p2,i2);
end

```

Научное издание

**Сергей Владимирович Поршнев
Дмитрий Вячеславович Кусайкин**

**ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ
СИГНАЛОВ, ЗАДАННЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ ВРЕМЕННОЙ СЕТКЕ
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КООРДИНАТ УЗЛОВ**

монография

В авторской редакции

Подписано в печать 12.01.2016. Формат 60х84/16
Печать оперативная. Усл. п.л. 12,2
Тираж 500 экз. Заказ № 01-12-06

Отпечатано с готового оригинал-макета в издательстве ЗЕБРА
432072, Россия, г. Ульяновск, ул. Жуковского, 83.